Georg Quaas (Leipzig): **Das 2-Sektoren-Modell**[1]

## 1. Überleitung vom *n*-dimensionalen Modell

### 1.1. Normierungsfragen

Das stoffliche Bruttoprodukt werde durch den Zeilenvektor für gemischte Gebrauchswertmengen $\mathbf{q}$ oder die dazugehörige Diagonalmatrix $\mathbf{Q} = \{\mathbf{q}\}$ dargestellt. In dem Industriezweig mit der Nummer $i$ - wobei die Zweige hier auch als Sektoren bezeichnet und immer als Ein-Produkt-Zweige unterstellt werden - seien $l_i$ Arbeiter tätig. Alle Zahlen $l_i$ für $i = 1,2,...,n$ fassen wir zu einem Zeilenvektor $\mathbf{l}$ zusammen. In der gesamten Volkswirtschaft sind dann

$$L = \mathbf{l}\,\mathbf{e}^{\mathbf{T}}$$

Beschäftigte und *je Einheit produzierter Gebrauchswertmenge* ein Arbeitsinput von

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{l}\mathbf{Q}^{-1}$$

zu verzeichnen. Der Vektor für den Arbeitsinput $\mathbf{a}_0$ gibt demnach - nach Zweigen differenziert - die Anzahl der Beschäftigten je Bruttoprodukteinheit an. Per definitionem erfüllt er die Gleichung

$$\mathbf{a_0}\mathbf{q}^{\mathbf{T}} = \mathbf{l}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{q}^{\mathbf{T}} = \mathbf{l}\mathbf{e}^{\mathbf{T}} = L.$$

Wir definieren jetzt das Bruttoprodukt je Beschäftigteneinheit durch

$$\overline{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{q}}{L}.$$

Wie man leicht erkennt, erfüllt dieser Vektor die Normierung

$$\mathbf{a_0}\overline{\mathbf{q}}^{\mathbf{T}} = 1.$$

M.a.W. bedeutet die Normierungsgleichung nichts anderes, als daß das Bruttoprodukt je Beschäftigteneinheit und der Arbeitsinput je Bruttoprodukteinheit gemessen werden.

---

[1] Ergänzende und erläuternde Bemerkungen zu Georg Quaas: Die Abhängigkeit des Preis-Wicksell-Effekts von der Numérairewahl. In: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik (Lucius & Lucius, Stuttgart 1998) Bd.217/2, S.227-243.

## 1.2. Das allgemeine Mengenmodell

Das Mengenmodell ist im *n*-sektoralen Fall einer auf die Beschäftigteneinheit bezogenen Volkswirtschaft in Anlehnung an die Notation von *H. D. Kurz* durch die Gleichung

$$\overline{\mathbf{q}} = \overline{\mathbf{q}}\,A\left(1+g\right)+c\overline{\mathbf{b}} \tag{1}$$

gegeben. Dabei ist $g$ der Wachstumsfaktor, $c$ der Konsumkoeffizient und $\overline{\mathbf{b}}$ der Vektor für die Konsumeinheit pro Beschäftigteneinheit. Nach dem oben Festgestellten gilt die Normierung

$$\mathbf{a_0}\overline{\mathbf{q}}^{\mathbf{T}} = 1.$$

Wir formen (1) um:

$$\overline{\mathbf{q}}\left[I-(1+g)A\right] = c\overline{\mathbf{b}}$$

$$\overline{\mathbf{q}} = c\overline{\mathbf{b}}\left[I-(1+g)A\right]^{-1}$$

$$1 = \overline{\mathbf{q}}a_0^T = c\overline{\mathbf{b}}\left[I-(1+g)A\right]^{-1}a_0^T$$

$$c = \frac{1}{\overline{\mathbf{b}}\left[I-(1+g)A\right]^{-1}a_0^T}$$

c=c(g) heißt die Konsumkurve. Achtung! $\overline{\mathbf{b}}$ ist durch die Struktur des Nettoprodukts festgelegt (siehe unten!).

Alternativ zu einer auf die Beschäftigteneinheit bezogenen Volkswirtschaft kann man auch den "unnormierten" Bruttoproduktvektor $\mathbf{q}$ verwenden, der die Gleichungen

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}\,A\left(1+g\right)+c\mathbf{b} \tag{1a}$$

und

$$\mathbf{a_0}\mathbf{q}^{\mathbf{T}} = L \tag{2a}$$

erfüllt. Wie man sieht, besteht der Unterschied nach Wegfall sämtlicher Relativierungen auf die Beschäftigteneinheit allein darin, daß im ersteren Fall in der Normierungsgleichung die Anzahl der Beschäftigten

$$L=1 \tag{3}$$

ist.

## 2. Die Mengenstruktur des 2-Sektoren-Modells

### 2.1. Definition des stationären Falles

Legt man die Anzahl $n$ der Sektoren auf 2 fest, erhält man das 2-Sektoren-Modell:

$$q_1 = (q_1 a_{11} + q_2 a_{21})(1+g) + cb_1 \tag{4}$$
$$q_2 = (q_1 a_{12} + q_2 a_{22})(1+g) + cb_2 \tag{5}$$

*Stationäre Modelle* zeichnen sich durch ein Wachstum $g$=0 aus:

$$q_1 = (q_1 a_{11} + q_2 a_{21}) + cb_1 \tag{6}$$
$$q_2 = (q_1 a_{12} + q_2 a_{22}) + cb_2 \tag{7}$$

Im folgenden wird nur dieser Fall behandelt.

Im stationären Fall ist die funktionale Beziehung zwischen Wachstumsrate $g$ und Konsumfaktor $c$ irrelevant. Wir fassen deshalb die rechten Glieder der beiden Gleichungen (6) und (7) zum stofflichen Nettoprodukt zusammen und bezeichnen sie zur Unterscheidung vom wertmäßigen Nettoprodukt als *Surplusprodukt* **s** mit den beiden Komponenten

$$s_1 = cb_1 \tag{8}$$
$$s_2 = cb_2 \tag{9}$$

Das Mengenmodell schreibt sich nun wie folgt:

$$q_1 = (q_1 a_{11} + q_2 a_{21}) + s_1 \tag{10}$$
$$q_2 = (q_1 a_{12} + q_2 a_{22}) + s_2 \tag{11}$$

## 2.2. Die Freiheitsgrade des 2-Sektoren-Modells

Die Normierung des Bruttoproduktvektors (2) lautet im 2-dimensionalen Fall explizit

$$a_{01}q_1 + a_{02}q_2 = L \ . \tag{12}$$

Wie bereits gesagt, kann man sämtliche Formeln leicht auf die Beschäftigteneinheit relativieren; es gilt dann (3).

Je nach dem, welche Größe man als die abhängige betrachtet, folgt aus (12) die Beziehung

$$q_1 = \frac{L - a_{02}q_2}{a_{01}} \tag{13}$$

oder die Beziehung

$$q_2 = \frac{L - a_{01}q_1}{a_{02}} \ . \tag{14}$$

Wir beobachten schon hier zwischen den letzten beiden Formeln eine Symmetrie, die man auch bei anderen Gleichungen des 2-Sektoren-Modells findet: die für den jeweils anderen Zweig gültige Beziehung kann durch Vertauschen der Indizes erzeugt werden.

Der stationäre Fall umfaßt folgende frei wählbare Parameter:

4 Inputkoeffizienten $a_{ik}$ mit $i,k = 1,2$ für den Produktionsmittelverbrauch;
2 Komponenten des Bruttoproduktvektors $q_i$ mit $i = 1,2$;
2 Koeffizienten für den Arbeitsinput $a_{0i}$ mit $i = 1,2$;
dies sind insgesamt 8 Freiheitsgrade.

Der Surplusproduktvektor $\mathbf{s} = [s_1, s_2]$ ist durch die Vorgabe der ersten 6 Parameter eindeutig determiniert. Das ergibt sich aus dem folgenden Gleichungssystem, das durch eine einfache Umstellung der Gleichungen (10) und (11) entsteht:

$$s_1 = q_1 - (q_1 a_{11} + q_2 a_{21}) \tag{15}$$
$$s_2 = q_2 - (q_1 a_{12} + q_2 a_{22}) \tag{16}$$

Durch die Vorgabe des Arbeitsinputs und des Bruttoprodukts ist gemäß (12) die (erforderliche) Beschäftigtenzahl *L* festgelegt.

Welche Parameter als die unabhängigen und welche als die abhängigen betrachtet werden, läßt sich innerhalb des Rahmens von 8 Freiheitsgraden variieren. Betrachtet man allerdings ein Modell, in dem die volkswirtschaftlichen Strukturen auf die Beschäftigteneinheit relativiert werden, so ist $L$=1, und wir haben nur noch 7 frei wählbare Parameter. Die Einschränkung betrifft primär das Verhältnis der beiden Komponenten des Bruttoproduktvektors zueinander, das in diesem Fall stärker fixiert wird. Nach (13) und (14) gilt entweder

$$\overline{q}_1 = \frac{1 - a_{02}\overline{q}_2}{a_{01}} \qquad (17)$$

oder

$$\overline{q}_2 = \frac{1 - a_{01}\overline{q}_1}{a_{02}} \quad . \qquad (18)$$

Im folgenden explizieren wir die Möglichkeit, das Surplusprodukt vorzugeben und das dazugehörige Bruttoprodukt zu berechnen.

## 2.3. Das Bruttoprodukt als Funktion des Surplusprodukts

Aus (10) folgt

$$q_1(1 - a_{11}) = q_2 a_{21} + s_1 \, . \qquad (19)$$

Eine analoge Formel erhält man aus (11):

$$q_2(1 - a_{22}) = q_1 a_{12} + s_2 \, . \qquad (20)$$

Die linken Seiten kann man als den *zweiglichen* Überschuß bezeichnen, das zum Pm-Verbrauch im jeweils anderen Zweig und für den Konsum zur Verfügung steht, nachdem vom Bruttoprodukt der Eigenverbrauch abgezogen worden ist.

Einfache Umstellung ergibt die vermittelnden Beziehungen:

$$q_1 = \frac{q_2 a_{21} + s_1}{1 - a_{11}} \qquad (21)$$

$$q_2 = \frac{q_1 a_{12} + s_2}{1 - a_{22}} \ . \tag{22}$$

Setzt man (22) in (19) ein, ergibt sich nach einfachen Umstellungen:

$$q_1 = \frac{s_1(1 - a_{22}) + s_2 a_{21}}{1 - a_{11} - a_{22} + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{23}$$

In ähnlicher Weise eliminiert man $q_1$ aus den anderen beiden Formeln, indem man (21) in (20) einsetzt:

$$q_2 = \frac{s_1 a_{12} + s_2(1 - a_{11})}{1 - a_{11} - a_{22} + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{24}$$

Wie man anhand der letzten beiden Formeln sieht, ist das Bruttoprodukt eindeutig durch die Vorgabe des Surplusprodukts bestimmt, wenn außerdem die technologischen Koeffizienten $a_{ij}$ gegeben sind.

## 2.4. Bedingungsgleichung für die Mengenstruktur

Eine zusammenfassende Bedingungsgleichung für die gebrauchswertmäßig-stoffliche Struktur des 2-Sektoren-Modells ergibt sich, wenn man die Formeln (23) und (24) für die beiden Komponenten des Bruttoprodukts in die ausgeschriebene Normierungsgleichung (12) eingesetzt werden. Nach Beseitigung des Nenners lautet sie:

$$s_1[(1 - a_{22})a_{01} + a_{12}a_{02}] + s_2[a_{21}a_{01} + (1 - a_{11})a_{02}] = L[1 - a_{11} - a_{22} + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}] \tag{25}$$

In dieser Gleichung sind 9 Variablen enthalten, von denen jeweils 8 als voneinander unabhängig betrachtet werden können. Wird das 2-Sektoren-Modell auf die Beschäftigteneinheit bezogen, reduziert sich die Zahl der Freiheitsgrade auf 7. Sind beispielsweise sämtliche Inputkoeffizienten gegeben und liegt die Beschäftigtenzahl fest, kann nur noch eine Komponente des Surplusproduktvektors frei gewählt werden.

## 2.5. Das Modell einer integrierten Industrie

Das Modell einer integrierten Industrie liegt vor, wenn sämtliche Produkte eines der beiden Zweige durch das System selber verbraucht werden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß es sich um die Produkte des zweiten Zweiges handelt. Demnach ist

$$(s_1 \succ 0) \wedge (s_2 = 0) \ . \tag{26}$$

Über etwas verschlungene Wege hinweg stellt sich die Volkswirtschaft in diesem Modell so dar, als wirke alles zusammen, um nur ein einziges Produkt herzustellen. Die "verschlungenen Wege" werden durch das folgende Flußdiagramm veranschaulicht:

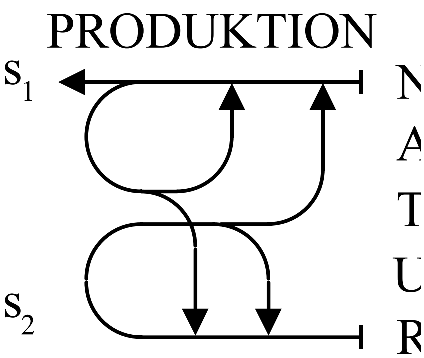



**Schaubild 1**

Das stoffliche Surplusprodukt besteht hier nur aus Produkten des Industriezweiges 1. Damit wird aus der Bedingungsgleichung (25):

$$s_1\left[(1-a_{22})a_{01} + a_{12}a_{02}\right] = L\left[1 - a_{11} - a_{22} + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right] \tag{27}$$

oder

$$s_1 = \frac{L\left[1 - a_{11} - a_{22} + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right]}{(1-a_{22})a_{01} + a_{12}a_{02}} \ . \tag{28}$$

Demnach ist das Surplusprodukt einer integrierten Industrie vollständig durch die Technologie und die Anzahl der beschäftigten Arbeitskräfte bestimmt.

Um das Surplusprodukt $s_1$ zu erhalten, ist ein bestimmtes Bruttoprodukt erforderlich. Seine Größe erhält man, wenn (28) unter Berücksichtigung von (26) in (23) und (24) einsetzt:

$$q_1 = \frac{L(1-a_{22})}{(1-a_{22})a_{01} + a_{12}a_{02}} \tag{29}$$

$$q_2 = \frac{La_{12}}{(1-a_{22})a_{01} + a_{12}a_{02}} \tag{30}$$

Das Bruttoprodukt einer integrierten Industrie ist somit durch die technologischen Koeffizienten und die Beschäftigtenzahl bestimmt. Insbesondere stehen die beiden Komponenten des Bruttoproduktvektors in einem fixen Verhältnis zueinander. Vergleich der beiden Gleichungen ergibt für das Bruttoprodukt des zweiten Sektors eine Determination durch das des ersten Sektors:

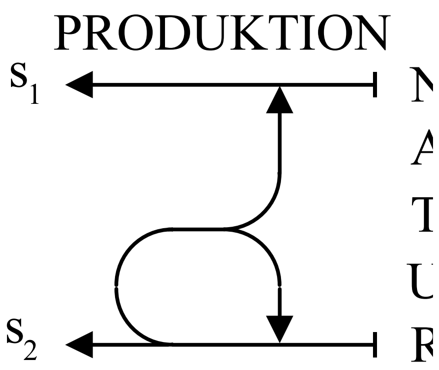
$$q_2 = \frac{q_1 a_{12}}{1-a_{22}} \ . \tag{31}$$

## 2.6. Das kanonische Modell

Werden im ersten Sektor Güter hergestellt, die nur konsumiert und nicht auch als Produktionsmittel eingesetzt werden, so ist in der Matrix der Inputkoeffizienten

$$a_{11} = a_{21} = 0. \tag{32}$$

Man spricht in diesem Fall von einem *kanonischen Modell*. Die Güterströme nehmen hier folgenden Weg:



Weitere Konsequenzen aus der Spezifik dieses Modells ergeben sich für die ausgepreiste Struktur des 2-Sektoren-Modells (siehe unten!).

## 2.7. Der Produktionsmittelverbrauch

Für das folgende führen wir einen neuen Vektor ein, der den Verbrauch an Produktionsmitteln einer bestimmten Art erfaßt. Seine erste Komponente sei

$$z_1 = q_1 a_{11} + q_2 a_{21} \ , \tag{33}$$

und sie erfasse den durch die Produktion in beiden Zweigen verursachten Verbrauch an Produkten des ersten Zweiges, und

$$z_2 = q_1 a_{12} + q_2 a_{22} \tag{34}$$

sei die entsprechende zweite Komponente des Produktionsmittelverbrauchs-Vektors **z**. Das Bruttoprodukt zerfällt nun gemäß (10) und (11) in Pm-Verbrauch und Surplusprodukt:

$$q_1 = z_1 + s_1 \tag{35}$$
$$q_2 = z_2 + s_2 \tag{36}$$

Trivialerweise stellt sich das Surplusprodukt als Differenz zwischen Bruttoprodukt und Produktionsmittelverbrauch wie folgt dar:

$$s_1 = q_1 - z_1 \tag{37}$$
$$s_2 = q_2 - z_2 \ . \tag{38}$$

Den Vektor für den Produktionsmittelverbrauch werden wir u.a. benötigen, um den Kapitalwert einfach und übersichtlich zu definieren.

# 3. Das Preismodell

## 3.1. Ableitung der Preisgleichungen

Das Mengensystem allein legt keine Preise fest. "Bewertet" man die beiden Gleichungen (37) und (38) mit nach Produkten differenzierten Preisen, so erhält man

$$s_1 p_1 = q_1 p_1 - z_1 p_1 \tag{1}$$

$$s_2 p_2 = q_2 p_2 - z_2 p_2 \ . \qquad (2)$$

Das mit Preisen bewertete Surplusprodukt ist demnach - wie das stoffliche Surplusprodukt selbst - gleich der Differenz zwischen dem bewerteten Bruttoprodukt und dem bewerteten Verbrauch an Produktionsmitteln, also dem verbrauchten Kapital.[2]

Betrachtet man noch einmal rückblickend die Güterströme im Mengenmodell, zum Beispiel anhand des Schaubildes 1, so ist klar, daß im allgemeinen Fall beide Zweige an den Produkten beider Zweige partizipieren - in welchem Maße das geschieht, ist im wesentlichen durch die technologischen Gegebenheiten determiniert. Für das Surplusprodukt gibt es keine solche zwingenden technologischen Erfordernisse. Der Macht der Gewohnheit folgend oder weil niemand in einer arbeitsteiligen Gesellschaft nur mit den Produkten seiner eigenen Produktion auskommt, hat jeder Zweig Ansprüche auf das in beiden Zweigen erzeugte Surplusprodukt. Wie soll es "gerecht" verteilt werden?

Als Ausgangspunkt zur Beantwortung dieser Frage kann die Summe des bewerteten Surplusprodukts, also

$$s_1 p_1 + s_2 p_2 = q_1 p_1 - z_1 p_1 + q_2 p_2 - z_2 p_2 \qquad (3)$$

genommen werden. Die Notwendigkeit der Verteilung dieser "Werte" erzwingt eine Entscheidung über den Verteilungsmodus. Nehmen wir an, Kapital und Arbeit sind nicht nur funktionelle Kategorien einer volkswirtschaftlichen Beschreibung, sondern repräsentieren auch soziale Unterschiede. Dann läge eine Verteilung zwischen diesen beiden "Faktoren" nahe. Verteilt werden muß entsprechend dem Maß, in dem beide Kategorien am Produktionsprozeß teilnehmen; und das ist durch die Bewertung des Verbrauchs an Produktionsmitteln und dem Einsatz an Arbeitskräften bereits gegeben. Nachdem es berücksichtigt ist, bleibt das Problem, wie stark die einzelne Einheit entweder von Kapital oder von Arbeit am Nettoprodukt partizipiert, immer noch eine Frage der Willkür oder extern vorgegebener Faktoren. Die Größe dieser Partizipation wird durch Profitrate $r$ und die Lohnquote $w$ (=nomineller Preis der Beschäftigteneinheit) erfaßt:

$$s_1 p_1 + s_2 p_2 = r(z_1 p_1 + z_2 p_2) + wL \qquad (4)$$

Gleichsetzen der rechten Seiten von (3) und (4) ergibt:

[2] Damit ist der Wert aller Produktionsmittel gemeint, die bei der Produktion untergegangen sind. Außerdem abstrahieren wir hier von den Problemen der Kuppelproduktion.

$$q_1p_1 + q_2p_2 = (1+r)(z_1p_1 + z_2p_2) + wL \qquad (5)$$

Hierin setzen wir die Ausdrücke für den stofflichen Verbrauch an Produktionsmitteln ein und berücksichtigen die Gleichung (12) des Mengenmodells:

$$q_1p_1 + q_2p_2 = (1+r)[(q_1a_{11} + q_2a_{21})p_1 + (q_1a_{12} + q_2a_{22})p_2] + w(a_{01}q_1 + a_{02}q_2) \qquad (6)$$

Entschließt man sich, Gleichung (6) als Summe zweier separater, in bestimmter Weise geordneter Gleichungen aufzufassen, erhält man die Preisgleichungen für ein System mit *L* Beschäftigten:

$$q_1p_1 = (1+r)(q_1a_{11}p_1 + q_1a_{12}p_2) + wa_{01}q_1 \qquad (7)$$
$$q_2p_2 = (1+r)(q_2a_{21}p_1 + q_2a_{22}p_2) + wa_{02}q_2 \qquad (8)$$

Da $q$ beliebig, ist dieses System äquivalent zu dem folgenden Gleichungssystem, das die gewöhnlich verwendeten *Preisgleichungen* des 2-Sektoren-Modells darstellt:

$$p_1 = (1+r)(a_{11}p_1 + a_{12}p_2) + wa_{01} \qquad (9)$$
$$p_2 = (1+r)(a_{21}p_1 + a_{22}p_2) + wa_{02} \qquad (10)$$

Die Preisgleichungen sind unabhängig von einer vorgenommenen oder unterlassenen Relativierung des Modells auf die Beschäftigteneinheit (Normierung) gültig. Ihnen liegen die beiden Entscheidungen zugrunde, (i) das Surplusprodukt zwischen eingesetztem Kapital und eingesetzter Arbeit zu verteilen und (ii) den daraus resultierenden summarischen Verteilungsmodus auf die beiden Zweige symmetrisch aufzuschlüsseln.

## 3.2. Lösungen der Preisgleichungen

Im 2-Sektoren-Modell gelten die Preisgleichungen (9) und (10). Der allgemeine Fall des 2-Sektoren-Modells zeichnet sich dadurch aus, daß sowohl das Gut 1 als auch das Gut 2 im Sinne von Sraffa "Basisprodukte" sind, d.h. direkt oder indirekt in die Produktion aller Waren eingehen.[3]

[3] Vgl. *Sraffa, P.* (1976), Warenproduktion mittels Waren. Frankfurt a. M. S.26.

Die Preisgleichungen lassen sich lösen, wenn man in ihnen zunächst den jeweils anderen Preis eliminiert. Dazu stellt man beispielsweise die zweite Gleichung nach $p_2$ um und setzt sie in die erste ein. Nach einigen Umformungen ergibt sich

$$p_1 = \frac{w\left[a_{01} + \left(a_{02}a_{12} - a_{01}a_{22}\right)\left(1+r\right)\right]}{1-\left(a_{11}+a_{22}\right)\left(1+r\right)+\left(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\right)\left(1+r\right)^2} \ . \tag{11}$$

Ein analoges Vorgehen erlaubt es, nach dem anderen Preis aufzulösen:

$$p_2 = \frac{w\left[a_{02} + \left(a_{01}a_{21} - a_{02}a_{11}\right)\left(1+r\right)\right]}{1-\left(a_{11}+a_{22}\right)\left(1+r\right)+\left(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\right)\left(1+r\right)^2} \ . \tag{12}$$

Wie man sieht, sind die Preise bestimmt, auch ohne daß man explizit einen Preismaßstab festgelegt hätte. (Der Preismaßstab ist implizit gegeben, nämlich durch den nominellen Preis der Beschäftigteneinheit $w$.) Man kann unterstellen, daß sowohl die beiden Komponenten des Preisvektors als auch die Lohnquote in irgendeiner Währungseinheit ausgedrückt werden.

Sowohl der Lohnsatz als auch die Profitrate lassen sich in diesen Ausdrücken beliebig vorgeben. Damit ändern sich die Preise. Insbesondere erhöhen sich bei gegebenem fixierten $r$ die Preise proportional mit den Löhnen, und zwar beide Komponenten im gleichen Maße. Dies ist ein Effekt, den man traditionell als *Lohn-Preis-Spirale* bezeichnet.

Teilt man die Gleichungen (11) und (12) durch die Lohnquote, ergeben sich Gleichungen für die Preise - ausgedrückt in Löhnen:

$$\hat{p}_1 = \frac{\left[a_{01} + \left(a_{02}a_{12} - a_{01}a_{22}\right)\left(1+r\right)\right]}{1-\left(a_{11}+a_{22}\right)\left(1+r\right)+\left(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\right)\left(1+r\right)^2} \ . \tag{13}$$

$$\hat{p}_2 = \frac{\left[a_{02} + \left(a_{01}a_{21} - a_{02}a_{11}\right)\left(1+r\right)\right]}{1-\left(a_{11}+a_{22}\right)\left(1+r\right)+\left(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\right)\left(1+r\right)^2} \ . \tag{14}$$

Die in Löhnen ausgedrückten Preise $\hat{\mathbf{p}}$ geben an, wie viele Löhne man zum Kauf des entsprechenden Gutes braucht, und sie sind offenbar eindeutig durch die technologische Struktur des Produktionsprozesses und durch die Profitrate bestimmt. Demnach wären die Beschäftigten nicht in der Lage, die Verteilung des Surplusproduktes mittels Lohnerhöhungen zu ihren Gunsten zu verändern. Lohnerhöhungen führen nach (11) und (12) zu Preiserhöhungen, die eine reale Veränderung der Verteilungsverhältnisse unterlaufen.

Der Lohnsatz verschwindet ebenfalls aus der expliziten Darstellung des Preises, wenn das Verhältnis der beiden Komponenten (11) und (12) gebildet wird:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{a_{02} + (a_{01}a_{21} - a_{02}a_{11})(1+r)}{a_{01} + (a_{02}a_{12} - a_{01}a_{22})(1+r)} \ . \tag{15}$$

Daraus folgt, daß das Verhältnis der Preise zueinander nur von der technologisch-stofflichen Struktur und von der Profitrate abhängt.

Die Preisgleichungen lassen sich aber auch lösen, wenn man eine der beiden Waren zum Maßstab der Preise (Numéraire) erhebt. Mathematisch bedeutet dies, den Preis der entsprechenden Ware gleich eins zu setzen. Andererseits ist plausibel: welche Ware man auch immer zum Numéraire erhebt, das *Verhältnis* der beiden Preise (15) bleibt davon unberührt.

Setzt man $p_1 = 1$, erhält man aus (15) für den Preis des Kapitalgutes - ausgedrückt in Konsumgütern - die Formel

$$p_2^{(1)} = \frac{a_{02} + (a_{01}a_{21} - a_{02}a_{11})(1+r)}{a_{01} + (a_{02}a_{12} - a_{01}a_{22})(1+r)} \ . \tag{16}$$

Alternativ dazu ergibt sich der Preis des Konsumgutes - ausgedrückt in Kapitalgütern -, wenn man $p_2 = 1$ setzt:

$$p_1^{(2)} = \frac{a_{01} + (a_{02}a_{12} - a_{01}a_{22})(1+r)}{a_{02} + (a_{01}a_{21} - a_{02}a_{11})(1+r)} \ . \tag{17}$$

Aus den letzten beiden Formeln lässt sich die Schlussfolgerung ziehen: Die Preise, die sich alternativ bei $p_1 = 1$ oder bei $p_2 = 1$ ergeben, verhalten sich bei Änderung der Profitrate invers zueinander, d.h.

$$p_2^{(1)}(r) = \frac{1}{p_1^{(2)}(r)} \ . \tag{18}$$

Dieser Effekt tritt natürlich nicht auf, wenn das originäre Verhältnis der Preise (15) konstant ist.

### 3.3. Kapitalwert und Kapitalintensität

Anknüpfend an die Definition des Pm-Verbrauchs durch die Gleichungen (33) und (34) des Mengenmodells definieren wir als den Wert des insgesamt aufgewendeten Kapitals die Größe

$$k = z_1 p_1 + z_2 p_2 \ , \tag{19}$$

die auf die Preise (11) und (12) abstellt. In ausführlicher Schreibweise ist also das Kapital

$$k = (q_1 a_{11} + q_2 a_{21}) p_1 + (q_1 a_{12} + q_2 a_{22}) p_2 \tag{20}$$

Je nach dem, ob wir ein 2-Sektoren-Modell mit einer beliebigen Anzahl von Beschäftigten betrachten oder ob wir es auf die Beschäftigteneinheit mit $L$=1 beziehen, handelt es sich bei (19) bzw. (20) um den *Kapitalwert* oder die *Kapitalintensität*. Im letzteren Fall müßte statt $q$ der Vektor $\overline{q}$ eingesetzt werden.

Da die Preise eine Funktion der Profitrate $r$ sind, hängt auch der Kapitalwert von der Verteilung ab: $k = k(r)$. Man spricht von einem negativen Preis-Wicksell-Effekt, wenn der Kapitalwert (oder die Kapitalintensität) mit wachsendem r zunimmt, von einem positiven PWE im umgekehrten Falle.

Setzt man $p_1 = 1$, ergibt sich für den Kapitalwert - ausgedrückt in Konsumgütern - die Größe

$$k^{(1)} = (q_1 a_{11} + q_2 a_{21}) + (q_1 a_{12} + q_2 a_{22}) p_2^{(1)}(r) . \tag{21}$$

Für $p_2 = 1$ dagegen ist

$$k^{(2)} = (q_1 a_{11} + q_2 a_{21}) p_1^{(2)}(r) + (q_1 a_{12} + q_2 a_{22}) \ . \tag{22}$$

Das inverse Verhalten von Preisen, die durch alternative Wahl des Preismaßstabs zustande kommen, erklärt vollständig, in welcher Weise - bei gegebener Technik - der Kapitalwert mit der Veränderung der Profitrate korreliert, und zwar in Abhängigkeit davon, welches Numéraire gewählt wird. Eine Vergleichbarkeit der mit unterschiedlichen Preismaßstäben gemessenen Kapitalwerte (21) und (22) erzielt man durch die Beziehung (18). Einsetzen in die Gleichung (21) ergibt beispielsweise

$$k^{(1)} = (q_1 a_{11} + q_2 a_{21}) + (q_1 a_{12} + q_2 a_{22}) \frac{1}{p_1^{(2)}(r)} \quad . \tag{23}$$

Der Kapitalwert (23), gemessen in Konsumeinheiten, läßt sich jetzt gut mit dem in Kapitalgütern gemessenen Kapitalwert (22) vergleichen. Man erkennt sofort, daß der Kapitalwert - vermittelt über die monotone Funktion $p_1^{(2)}(r)$ - mit $r$ abnimmt, wenn sie im anderen Numéraire ausgedrückt zunimmt, und vice versa. M.a.W.: der sog. Preis-Wicksell-Effekt wechselt mit dem Übergang zu einem anderen Preismaßstab das Vorzeichen. Vorausgesetzt ist, daß sowohl der Verbrauch an Gütern der Sorte 1 (in der Regel die Konsumgüter)

$$z_1 = q_1 a_{11} + q_2 a_{21} > 0 \tag{24}$$

als auch der der Sorte 2 (in der Regel Kapitalgüter)

$$z_2 = q_1 a_{12} + q_2 a_{22} > 0 \tag{25}$$

ist.

Multiplikation der Gleichung (23) mit $p_1^{(2)}(r)$ und Vergleich des Resultats mit (22) zeigt, daß

$$k^{(2)} = k^{(1)} p_1^{(2)}(r) \tag{26}$$

ist. Diese Formel wird bei der Diskussion des Kapitalkoeffizienten weiter unten benötigt.

### 3.4. Spezifikation für das kanonische Modell

Der hier behandelte allgemeine Fall des 2-Sektoren-Modells wäre nicht der allgemeine Fall, wenn nicht auch das kanonische Modell, bei dem es nur ein einziges Basisprodukt gibt, darunter fiele. Das eben Gezeigte gilt deshalb im Prinzip auch für diesen Modelltyp - mit der wichtigen Einschränkung, das die Vorzeichenumkehr des PWE in diesem einfacheren Modell keinen Raum hat, zu erscheinen. Gilt nämlich die Gleichung (32) des Mengenmodells, verkürzen sich (22) und (23) auf die folgenden Ausdrücke:

$$k^{(2)} = q_1 a_{12} + q_2 a_{22} \tag{27}$$

$$k^{(1)} = \left(q_1 a_{12} + q_2 a_{22}\right) \frac{1}{p_1^{(2)}(r)} . \tag{28}$$

Das Verschwinden des Verbrauchs $z_1$ verhindert den Einfluß von $p_1^{(2)}(r)$ auf $k^{(2)}$, so daß dieser Wert zur Konstante erstarrt, während $k^{(1)}$ nach wie vor entweder positiv oder negativ mit $r$ korreliert. Da eine Konstante überhaupt nicht korreliert, kann sich somit auch das Vorzeichen des PWE nicht umkehren. Anders ausgedrückt: Wenn die Güter, durch deren Preise die Umkehr des Vorzeichens beim PWE zustande käme, gar nicht als Produktionsmittel verwendet werden, kann die Abhängigkeit des PWE vom Numéraire nicht *erscheinen*.

Will man diese, manchem vielleicht unnötig *dialektisch* erscheinende Redeweise vermeiden, sollte man den hier zur Debatte stehenden Effekt[4] etwas großzügiger definieren: Auch wenn ein positiver (negativer) PWE durch Wahl eines anderen Preismaßstabs zum Verschwinden gebracht werden kann (neutraler PWE), liegt (offensichtlich!) eine Numéraireabhängigkeit vor.

Wohlgemerkt wird damit nicht der Preis-Wicksell-Effekt neu definiert, sondern das, was man unter der Numéraireabhängigkeit zu verstehen hat: diese liegt nach dem breiteren Verständnis nicht nur dann vor, wenn das Vorzeichen des PWE ins Gegenteil umschlägt, sondern auch dann, wenn es neutralisiert wird. Mit Sicherheit wird damit der Begriff der Numéraireabhängigkeit nicht gerade "vergewaltigt", sondern eher von einer künstlichen Enge befreit!

### 3.5. Die Lohnkurven bei unterschiedlicher Numérairewahl

Setzt man in (11) $p_1 = 1$, erhält man die zum Preis (16) und zum Kapitalwert (21) gehörige Lohnkurve, die von der Profitrate $r$ abhängt:

$$w^{(1)} = \frac{1-\left(a_{11}+a_{22}\right)\left(1+r\right)+\left(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\right)\left(1+r\right)^2}{a_{01}+\left(a_{02}a_{12}-a_{01}a_{22}\right)\left(1+r\right)} . \tag{29}$$

Im Gegensatz zu den ursprünglichen Preisgleichungen sind jetzt der Lohnsatz und die Profitrate nicht mehr unabhängig voneinander wählbar. Für $r$=0 erreicht die Funktion $w^{(1)}(r)$ ihr Maximum bei

$$w^{(1)}{}_{\max} = \frac{1-\left(a_{11}+a_{22}\right)+\left(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\right)}{a_{01}+\left(a_{02}a_{12}-a_{01}a_{22}\right)} . \tag{30}$$

---

[4] Wohlgemerkt ist dies nicht der PWE, sondern die Numeraireabhängigkeit des PWE.

Das Minimum der Lohnquote ist mit $w^{(1)} = 0$ erreicht. Dem entspricht die maximale Profitrate *r=R*, die sich bei der algebraischen Lösung des Gleichungssystems (9) und (10) ohne die rechten Terme für den Arbeitsinput durch Nullsetzen der dazugehörigen Determinante

$$Det = 1 - (a_{11} + a_{22})(1+R) + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(1+R)^2 = 0 \tag{31}$$

ergibt. Wie man sieht, ist dies der Zähler von (29) bei der maximalen Profitrate $R$ und $w^{(1)} = 0$.

Erhebt man die Güter aus dem Sektor 2 zum Numéraire, was rein theoretisch immer möglich ist, indem man in (12) $p_2 = 1$ setzt, gilt die folgende Gleichung für die Lohnkurve:

$$w^{(2)} = \frac{1 - (a_{11} + a_{22})(1+r) + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(1+r)^2}{a_{02} + (a_{01}a_{21} - a_{02}a_{11})(1+r)} \ . \tag{32}$$

Man sieht sofort, daß die im Numéraire 2 ausgedrückte Lohnkurve an derselben Stelle ihr Minimum erreicht wie (29). Allerdings unterschieden sich die beiden Maxima, da

$$w^{(2)}{}_{\max} = \frac{1 - (a_{11} + a_{22}) + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{a_{02} + (a_{01}a_{21} - a_{02}a_{11})} \tag{33}$$

einen im allgemeinen von (30) verschiedenen Wert ergibt.

Setzt man (29) und (32) miteinander in Verhältnis, so erhält man den Ausdruck (15), der mit der Gleichung (16) übereinstimmt, also

$$\frac{w^{(1)}}{w^{(2)}} = \frac{p_2}{p_1} = p_2^{(1)} = \frac{1}{p_1^{(2)}} \ . \tag{34}$$

Hierbei ist außerdem (18) benutzt worden. Gl. (34) zeigt, daß die auf einen bestimmten Maßstab festgelegten Preise das Vermittlungsglied zwischen den beiden Lohnkurven darstellen.

$$w^{(2)} = w^{(1)} p_1^{(2)} \qquad (...)$$

### 3.6. Das Nettoprodukt

Das gesamte mit Preisen bewertete Surplusprodukt bezeichnen wir als Nettoprodukt $y$, wobei

$$y = \mathbf{sp} = s_1 p_1 + s_2 p_2 \ . \qquad (35).$$

Nach (4) ist

$$y = r(z_1 p_1 + z_2 p_2) + wL \ . \qquad (36)$$

$y$ hängt direkt, gegebenenfalls aber auch indirekt - über $w = w(r)$ oder $p = p(r)$- von der Profitrate ab. Bei $r$=0 spezifiziert sich dies zu

$$y(0) = w_{\max} L \qquad (37)$$

oder

$$w_{\max} = \frac{y(0)}{L} . \qquad (38)$$

Wie nicht anders zu erwarten, wir bei verschwindender Profitrate das gesamte Nettoprodukt auf die $L$ Beschäftigten verteilt.

Festlegung auf einen der beiden Numéraires erlaubt, entweder (30) oder (33) einzusetzen. Damit ist dann das Nettoprodukt vollständig auf die technologischen Koeffizienten und die Beschäftigtenzahl zurückgeführt.

Es ergibt sich

$$y^{(1)}(0) = \frac{1-(a_{11}+a_{22})+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})}{a_{01}+(a_{02}a_{12}-a_{01}a_{22})} L \qquad (39)$$

und alternativ

$$y^{(2)}(0) = \frac{1-(a_{11}+a_{22})+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})}{a_{02}+(a_{01}a_{21}-a_{02}a_{11})} L \ . \qquad (40)$$

Das Nettoprodukt hängt in seiner Größe somit ebenfalls von der Wahl des Numéraires ab.

Aus (35) lassen sich alternativ zu (39) und (40) die Gleichungen

$$y^{(1)}(r) = s_1 + s_2 p_2^{(1)}(r) \ . \tag{41}$$

$$y^{(2)}(r) = s_1 p_1^{(2)}(r) + s_2 \tag{42}$$

ableiten. Gleichsetzen der korrespondierenden Gleichungen (39) und (41) bzw. (40) und (42) ergibt bei Berücksichtigung von (16) und (17) die beiden für $r$=0 gültigen Beziehungen

$$s_1 + s_2 \frac{a_{02} + a_{01}a_{21} - a_{02}a_{11}}{a_{01} + a_{02}a_{12} - a_{01}a_{22}} = L \frac{1 - a_{11} - a_{22} + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{01} + a_{02}a_{12} - a_{01}a_{22}} \tag{43}$$

$$s_1 \frac{a_{01} + a_{02}a_{12} - a_{01}a_{22}}{a_{02} + a_{01}a_{21} - a_{02}a_{11}} + s_2 = L \frac{1 - a_{11} - a_{22} + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{02} + a_{01}a_{21} - a_{02}a_{11}} \tag{44}$$

Diese Gleichungen führen auf die identische Gleichung

$$s_1\left[(1 - a_{22})a_{01} + a_{12}a_{02}\right] + s_2\left[a_{21}a_{01} + (1 - a_{11})a_{02}\right] = L\left[1 - a_{11} - a_{22} + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right] \tag{45}$$

die außerdem mit der Bedingungsgleichung (25) für die Mengenstruktur übereinstimmt.

Einsetzen der Beziehung zwischen den in unterschiedlichen Numéraires ausgedrückten Preisen (18) in die Gleichung (41) ergibt

$$y^{(1)}(r) = s_1 + s_2 \frac{1}{p_1^{(2)}(r)} \ . \tag{46}$$

Multiplikation mit $p_1^{(2)}(r)$ und Vergleich des Resultats mit (41) zeigt, daß

$$y^{(2)}(r) = y^{(1)}(r) p_1^{(2)}(r) \tag{47}$$

ist. Diese Formel wird ebenfalls bei der Diskussion des Kapitalkoeffizienten weiter unten benötigt.

### 3.7. Die Profitkurve

Nach Festlegung irgendeines Maßstabs der Preise haben wir die Lohnquote *w* als Funktion *w(r)* der Profitrate aufgefaßt. Man kann aber auch umgekehrt die Profitrate als eine Funktion der Lohnquote betrachten. Multipliziert man beispielsweise für $p_1 = 1$ Gleichung (29) aus und löst die quadratische Gleichung nach den Nullstellen für *r* auf, wobei nur positive Profitraten zu wählen sind, erhält man

$$r_{1,2}^{(1)} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \tag{48}$$

mit den Parametern

$$p^{(1)} = \frac{-(a_{11} + a_{22}) + 2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + w(a_{01}a_{22} - a_{02}a_{12})}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{49}$$

und

$$q^{(1)} = \frac{1 - (a_{11} + a_{22}) + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + w(a_{01}(a_{22} - 1) - a_{02}a_{12})}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} . \tag{50}$$

Trotz der vielleicht verwirrenden Schreibweise sollte man weder (49) mit den Preisen noch (50) mit dem Bruttoproduktvektor verwechseln. Der Unterschied ist durch das Fehlen des Indexes für die Komponentennummer kenntlich gemacht worden.

Analoge Gleichungen kann man nun noch für $p_2 = 1$ erhalten. Der Einfachheit halber vertauscht man dazu die Indizes 1 und 2 miteinander.

### 3.8. Der Kapitalkoeffizient

Mit Hilfe der oben abgeleiteten Formeln erhält man für den Kapitalkoeffizienten

$$\frac{k}{y} = \frac{\mathbf{q}^T A \mathbf{p}}{\mathbf{q}^T (I - A)\mathbf{p}} \tag{51}$$

oder, ausführlich geschrieben,

$$\frac{k}{y}=\frac{\left(q_1a_{11}+q_2a_{21}\right)p_1+\left(q_1a_{12}+q_2a_{22}\right)p_2}{\left(q_1-q_1a_{11}-q_2a_{21}\right)p_1+\left(q_2-q_1a_{12}-q_2a_{22}\right)p_2} \tag{52}$$

Um zu sehen, ob auch diese Größe von der Numérairewahl abhängig ist, berücksichtigen wir (26) und (47):

$$\left.\frac{k}{y}\right|^{(2)}=\frac{k^{(2)}}{y^{(2)}}=\frac{k^{(1)}p_1^{(2)}(r)}{y^{(1)}p_1^{(2)}(r)}=\frac{k^{(1)}}{y^{(1)}}=\left.\frac{k}{y}\right|^{(1)} \tag{53}$$

Der Kapitalkoeffizient ist also - wie auch das Verhältnis der beiden Preise zueinander - eine Größe, die ausnahmsweise einmal nicht vom Numéraire abhängt.