Sraffas Einstieg: Stationäre 2-Sektoren-Wirtschaft

Ich zitiere aus WmW (S.21):

"Kapitel I
Produktion für den Lebensunterhalt

1 Betrachten wir zunächst eine extrem einfache Gesellschaft, die gerade genug erzeugt, um sich selbst zu erhalten. Die Waren werden in verschiedenen Zweigen produziert und nach der Ernte am Markte getauscht. Unterstellen wir fürs erste, daß nur zwei Waren erzeugt werden, Weizen und Eisen. Beide Waren werden zu einem Teil als Konsumgüter für die Beschäftigten, der Rest als Produktionsmittel – Weizen als Saatgut und Eisen in Gestalt von Werkzeugen - verwendet."

Die Produktionsstruktur wird zunächst in Form von Reaktionsgleichungen, die uns aus der Chemie bekannt sind, notiert. Ich nenne sie im folgenden auch Produktionsgleichungen, obwohl das nicht ganz korrekt ist, und zwar weil es sich im strengen Sinne um gar keine Gleichungen handelt. Hier sind sie:

280 qr Weizen + 12 t Eisen → 400 qr Weizen
120 qr Weizen + 8 t Eisen → 20 t Eisen (1)

(Ein Quarter (Getreidemaß)=64 Gallons=290,79 l. → 1 Gallon = 4,5 l)

Jede Zeile repräsentiert einen Zweig: die erste einen (modelltheoretisch: den) landwirtschaftlichen, die zweite den industriellen Zweig.

Auf der linken Seite stehen die Inputs, rechts der Output. Es werden also beispielsweise 280 qr Weizen und 12 t Eisen gebraucht, um 400 qr Weizen herzustellen.

Analog ist die zweite Zeile zu interpretieren.

Es versteht sich, daß das Zeichen "+" hier nicht im mathematischen Sinne zu verstehen ist: Weizen und Eisen können nicht addiert werden. Sie werden aber kombiniert und dann verbraucht, um Produkte herzustellen. Das Zeichen "→" steht hier offenbar für den Prozeß der Produktion, der aus dieser Sicht nichts als der Übergang von einem bestimmten Input zu einem bestimmten Output ist.

Nach der Produktion werden die Güter "am Markt" getauscht. Wir wissen aber noch nicht, in welchen Verhältnissen. Der Markt wird von Sraffa übrigens auch gar nicht modelliert (obwohl man das mit Hilfe seiner Theorie durchaus tun kann).

Wir sehen hier gleich am Anfang die Spezifik der neoricardianischen Produktionstheorie: Im Zentrum steht die Analyse der Produktion, der Markt kommt nur am Rande, genauer gesagt: als ein sekundäres Phänomen vor.

Johannes Behr/Gunther Kohlmey, die Hg. von WmW in der DDR, sagten dazu: “Der Markt ist in Sraffas Studien eine letzten Endes von der Produktion determinierte Kategorie.” (WmW, S.12)

Exkurs:
Pasinetti über die Darstellung der Produktion in der Neo-Klassik

Ausgangspunkt der neoklassischen Schule ist das Modell des Tausches zwischen mindestens zwei rational handelnden Akteuren, die ihren Nutzen maximieren. Dazu müssen hypothetisch Nutzenfunktionen (deren empirische Bestimmung bis heute problematisch geblieben ist) angenommen werden. Auf dem Markt stellt sich dann ein pareto-optimales Gleichgewicht ein: niemand kann seinen Gesamtnutzen erhöhen, ohne eine Verringerung des Gesamtnutzens eines anderen Marktteilnehmers zu verursachen (= optimale Allokation).

“Dieses Modell hat eindeutig nichts mit der Produktion zu tun.” (Pasinetti: Vorlesungen zur Theorie der Produktion, S.46) Allerdings sei das Tauschmodell in den 90er Jahren des 19. Jahrhunderts auf den Produktionsprozeß ausgedehnt (Grenzproduktivitätstheorie). “Damit dies möglich wurde, mußte man jedoch den Vorgang der Produktion den Erfordernissen eines Modells anpassen, das sich auf den Reichtum als Bestandsgröße bezieht.” (S.47) Anders ausgedrückt: der Produktionsprozeß wurde in Analogie zum Marktmodell rekonstruiert.

Wie weit man dabei aktuell gekommen ist, kann man bei A. Wagner: Mikroökonomik, Kapitel 2 nachlesen. Ich werde versuchen, die Parallelitäten zwischen beiden Ansätzen darszustellen.

Eine Konsequenz der Tatsache, daß sowohl in der herrschenden Lehrmeinung als auch im neoricardianischen Modell die Produktion behandelt wird: Man kann die Theorie der Produktion der neoricardianischen Schule nicht einfach durch die Gegenstandbestimmung abgrenzen.

Doch nun zurück zu den Reaktions-/Produktions-Gleichungen!

Bei näherer Betrachtung stellen wir fest, daß der Output gerade ausreicht, um in der nächsten Periode die Produktion auf gleicher Stufenleiter fortsetzen zu können. (Natürlich sind die Zahlen gerade so gewählt worden, daß das funktioniert.) Formal müssen wir jetzt wirklich summieren: Und zwar stellt die 1. Spalte den durch die beiden Zweige verursachten Verbrauch an Weizen dar, während die zweite Spalte den Eisenverbrauch (als Produktionsmittel) erfaßt:

280	12
120	8
400	20

Der Verbrauch jedes Gutes stimmt genau mit dem Output überein. Die Produktion kann auf derselben Stufe fortgesetzt werden (einfache Reproduktion, das heutige Null-Wachstum ist noch etwas anderes, da es nicht allein auf die physische Struktur des Outputs abstellt).

Ein gewisses Problem stellt allerdings der Markt dar. Damit einfache Reproduktion erfolgen kann, müssen die Güter auf dem Markt umverteilt werden, und zwar genau so, wie es die Struktur der Produktion verlangt. (Das nennt Sraffa die Produktionsmethoden. S.21.)

Der Staat ist bekanntlich nicht die einzige Umverteilungsmaschine. Der Markt wird oft als ein Mechanismus der Primärverteilung angesehen. Hier sehen wir, daß auch die Produktion umverteilt: Wir haben eine Anfangs- und eine Endverteilung. Die Anfangsverteilung muß in etwa wiederhergestellt werden, wenn der Prozeß wiederholt werden soll.

Die Lösung des Problems erfolgt über den Markt und durch den Preis (ein Gleichgewichtspreis), oder zunächst einmal durch entsprechende Tauschwerte.

Tauschwert: Angabe des “Wertes” einer Ware durch die Quantität einer anderen Ware, die man dafür eintauschen kann. Der Kornwert einer Ware, zum Beispiel einer Flasche Brantwein, ist die Menge Korn, die man dafür auf dem Markt bekommen kann.

Wir wissen noch nicht, wie man auf den “richtigen Tauschwert” kommt, der das Reproduktionsgleichgewicht herstellt. Er lautet: 10 qr Weizen für 1 t Eisen. Man könnte ihn zum Beispiel durch Probieren herausfinden. Dabei würden wir feststellen, daß jede Abweichung vom “Gleichgewichtspreis” zu einer Verminderung der Produktion in der nächsten Periode führt.

(Das konnte man schon am Tableau oeconomique feststellen.)

Spielen wir den von Sraffa vorgeschlagenen Tauschwert durch:

Von den 400 qr Weizen behält der 1. Zweig 280 qr ein (die werden entweder vom Produzenten einbehalten oder werden innerhalb der Bauernschaft getauscht – aber Weizen gegen Weizen ist kein sehr plausibler Vorgang). Wirklich auf den Markt gelangen folglich nur 120 qr Weizen.

Ähnliches gilt für die Eisenindustrie: Von den 20 t werden 8 t als zukünftiger Eigenverbrauch einbehalten, also nur 12 t wirklich auf dem Markt angeboten.

Jetzt sieht man, wie der Tauschwert zustande kam: 120 qr Weizen haben denselben Wert wie 12 t Eisen, also 10 qr Weizen für 1 t Eisen. Der Weizenwert des Eisens ist 10 qr. Der Eisenwert des Weizens ist 1/10 t Eisen.

Wenn der Markt diesen "Preis" akzeptiert, dann kann die Produktion von vorn beginnen. Wenn nicht – dann wird es wohl eine massive Störung der Reproduktion geben.

Analyse des Modells

Bislang ist es noch nicht besonders deutlich sichtbar geworden, daß hier zwei Strukturen im Spiel sind, und zwar sowohl auf dem Markt als auch in der Produktion.

Da haben wir zunächst die physische Struktur, die durch die Produktionsgleichungen (siehe oben!) dargestellt wurde. Diese werden wir sogleich in mathematisch etwas exakterer Form notieren.

Die zweite Struktur basiert auf den Preisen (in unserem Fall: den Tauschwerten) UND der physischen Struktur. Wie kann man diese bezeichnen? "Bepreiste Struktur" oder "mit den Preisen bewertete Struktur" wäre korrekt, klingt aber umständlich.) Für den Händler ist (Menge x Preis) = Wert. Man könnte diese zweite Struktur die der Warenwerte bezeichnen. Das ist aber nicht ganz korrekt, da es eine Verwechslungsgefahr mit den Werten gibt, die in der Arbeitswerttheorie eine Rolle spielen und die in der Regel eine andere Struktur als die Preise haben. Wer kennt aber schon die AWT? Deshalb bleibe ich hier bei diesem laxen Wertbegriff.

Es sollte an dieser Stelle klar sein, daß das, was in den amtlichen Statistiken über die Volkswirtschaft berichtet sind, in dem eben definierten Sinne "Werte" sind. (Recht selten werden physische Mengen angegeben.)

Die stoffliche Struktur des 2-Sektoren-Modells

Für das folgende führen wir einen Vektor ein, der den Verbrauch an Produktions- und Lebensmitteln erfaßt. Seine erste Komponente sei

$$x_1 = x_{11} + x_{21} \ , \tag{2}$$

und sie erfasse den durch die Produktion in beiden Zweigen verursachten Verbrauch an Produkten des ersten Zweiges, und

$$x_2 = x_{12} + x_{22} \tag{3}$$

sei die entsprechende zweite Komponente des Verbrauchs-Vektors **x**. Insgesamt sieht der Verbrauchsvektor so aus:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Er erfaßt den Gesamtverbrauch der Volkswirtschaft - nach Güterarten differenziert. Diese Differenzierung wird durch die von der Mathematik übernommene Matrix- und Vektorschreibweise ermöglicht. Ein Vektor ist ein einfaches Zahlenschema, im vorliegenden Fall eine Zeile, die zwei Positionen für die beiden Güter, die im Spiel sind, umfaßt. Deshalb heißt er auch Zeilenvektor - im Unterschied zum Spaltenvektor

$$x^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

der aus x durch Transposition hervorgeht.

Wenn wir die Verbrauchszahlen x_{ij} so ordnen wie oben in den Reaktionsgleichungen, dann erhalten wir folgendes Zahlenschema:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

Ein solches Schema nennt man eine Matrix. In diesen Fall handelt es sich um eine (2,2)-Matrix, weil sie 2 Zeilen und 2 Spalten hat. Man kann solche Zahlenschemata abkürzen und mit Symbolen belegen, zum Beispiel X:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \tag{6}$$

Im vorliegenden Fall lautet X:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 280 & 12 \\ 120 & 8 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Um die Spaltensumme korrekt durchführen zu können, brauchen wir noch ein anderes Schema

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

das ist eine spezielle Matrix mit einer Zeile und 2 Spalten. Solche speziellen Matrizen nennt man - wie gesagt - Vektoren. Es handelt es sich wiederum um einen Zeilenvektor.

Den Zeilenvektor e und die Matrix X kann man nach bestimmten Regeln multiplizieren; das geht so:

$$eX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + x_{21} & x_{12} + x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} = x \tag{9}$$

Als Resultat der Multiplikation erhalten wir den oben definierten Vektor des Gesamtverbrauchs (nach Warenarten sortiert) oder kurz den Verbrauchsvektor.

Jetzt haben wir alle Größen auf der linken Seite der Reaktionsgleichungen erfaßt. Uns fehlt nur noch der Output. Wir nennen den Vektor q

$$q = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \end{pmatrix}$$

den (physischen) Bruttoproduktvektor.

Das Ganze mit Zahlen belegt:

$$q = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 & 20 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Die Multiplikation der Matrix X mit dem Spaltensummenvektor e ergibt:

$$eX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 280 & 12 \\ 120 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 & 20 \end{pmatrix} = x \tag{11}$$

den Verbrauch, der im vorliegenden Modell zahlenmäßig gleich dem Bruttoprodukt ist. Mathematisch:

$$x = q, \tag{12}$$

Verbrauch gleich Output - das ist das Kennzeichen für einfache Reproduktion des Systems.

Damit ist das Produktionsgeschehen ganz elementar in ein einfaches Modell gebracht worden. Bevor ich zu den Preisen übergehe, möchte ich noch ein paar Verfeinerungen anbringen. Dazu gibt folgendes Problem Anlaß:

Die Struktur der Verbrauchszahlen ist in einem gewissen Sinne typisch für die angewandte Technologie: Aus 120 t Weizen und 8 t Eisen werden 20 t Eisen produziert. Wenn es durch organisatorische oder technische Verbesserungen gelingt, nicht nur 20, sondern 25 t Eisen herzustellen, und zwar mit nur 100 t Weizen und 8 t Eisen als Einsatz, dann hat sich die Technologie verändert (verbessert) - der zweite Industriezweig ist produktiver geworden. Klarerweise ändert das sowohl X als auch q.

Andere Zahlen ergeben sich aber auch, wenn wir - bei gleicher Technologie - einfach nur überall das Doppelte herstellen (wenn man für einen Moment konstante Skalenerträge unterstellt - was (nach Sraffa) nicht unbedingt erforderlich, aber erlaubt ist. Die Produktionsmethoden würden sich dann wie folgt darstellen:

$$eX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 560 & 24 \\ 240 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800 & 40 \end{pmatrix} = x \tag{13}$$

Von der Abhängigkeit der Darstellung der Produktionsstruktur vom Bruttoprodukt wollen wir uns jetzt befreien. Dazu teilen wir die Koeffizienten der Verbrauchsmatrix durch das Bruttoprodukt des entsprechenden Zweiges. Sei

$$Q = \{q\} = \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix} \text{ die Matrix des Bruttoprodukts und} \tag{14}$$

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{q_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{q_2} \end{pmatrix} \text{ die dazugehörige Inverse,} \tag{15}$$

dann ist

$$Q^{-1}X = \begin{pmatrix} \dfrac{x_{11}}{q_1} & \dfrac{x_{12}}{q_1} \\ \dfrac{x_{21}}{q_2} & \dfrac{x_{22}}{q_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A \tag{16}$$

Und in Zahlen

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{280}{400} & \dfrac{12}{400} \\ \dfrac{120}{20} & \dfrac{8}{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{7}{10} & \dfrac{3}{100} \\ 6 & \dfrac{2}{5} \end{pmatrix} \tag{17}$$

A heißt „technologische Matrix“, sie spiegelt mit Hilfe der Verbrauchszahlen je Bruttoprodukt die Struktur der für die in den beiden Zweigen typischen Mischtechnologie wieder.

Der Zusammenhang zwischen Bruttoprodukt q und Verbrauch x läßt sich jetzt so notieren:

$$qA = x. \tag{18}$$

Wenn die Inverse zu A existiert, dann gilt außerdem

$$q = x\ A^{-1} \tag{19}$$

Diese Vektorgleichung zeigt die Abhängigkeit des Bruttoprodukts vom Verbrauch (=den Faktoreinsatzmengen). Für später notiere ich noch die Gleichung

$$q = e\ X\ A^{-1} \tag{20}$$

die sich unmittelbar aus der letzten Formel und aus der Definition des Verbrauchsvektors ergibt.

Das gilt allgemein. Im vorliegenden Fall ist außerdem

$qA = x = q$ (einfache Reproduktion). Wenn jetzt q verdoppelt wird, verdoppelt sich auch der physische Verbrauch x, aber die technologische Matrix bleibt konstant. Aus den letzten beiden Gleichungen folgt nämlich einfach

$$2qA = 2x$$

ohne daß sich die Verbrauchszahlen in A geändert hätten.

Auf dem Hintergrund der bekannten Produktionsfunktionen mit steigendem oder fallendem Return bedeutet das: Wir arbeiten mit einer linearen Näherung. Bei jährlichen Wachstumsraten von wenigen Prozent ist das sicher nicht sehr problematisch.

Ich hatte versprochen, auf Parallelitäten mit der Darstellung der Produktion im neoklassischen Mainstream hinzuweisen - stets mit der mikroökonomischen Modellierung beginnend. Da wir erst einen kleinen Teil des Modells kennen, kann der Vergleich auch nur punktuell sein.

Das Gegenstück zu dem bislang Dargestellten ist klarerweise die Produktionsfunktion. Diese beinhaltet eine Zuordnung von Produktmenge und Faktoreinsatzmengen. Unterstellt man Ein-Produkt-Unternehmungen, so kann man das vorliegende Modell so interpretieren, daß es aus 2 Klassen von Ein-Produkt-Unternehmungen besteht. Wir haben es demnach mit mindestens zwei (aggregierten) Produktionsfunktionen zu tun:

$$q_1 = q_1(x_{11}, x_{12}) \tag{21}$$
$$q_2 = q_2(x_{21}, x_{22}) \tag{22}$$

Es ist nur eine formale Umformung, wenn wir diese beiden Funktionen mit Hilfe der Matrizenrechnung als eine Funktion darstellen:

$$q = q(X) \tag{23}$$

Diese Funktion können wir im vorliegenden Fall genau angeben. Es handelt sich um die Funktion (20).

Zur genaueren Einordnung jetzt Wagner S.39:

"Die Produktionsfunktion drückt technologisches Wissen aus: Es gibt ein Gut, das man produzieren und anbieten kann; man weiß, wie dieses Gut erzeugt werden kann.

Im einfachsten Falle sind mit einer bestimmten Produktmenge auch die Faktoreinsätze festgelegt. Dabei handelt es sich um **limitationale Produktionsfunktionen** mit festem Faktoreinsatzverhältnis, die eindeutig zu Faktorverbrauchsfunktionen umkehrbar sind."

Das ist hier der Fall, die Faktorverbrauchsfunktion ist (18).

"Ein bekannter Fall linear-limitationaler Funktionen ist die *Leontief-Produktionsfunktion,* die mit technisch vorgegebenen Inputkoeffizienten (a_1 und a_2) oder Outputkoeffizienten (b_1 und b_2) geschrieben werden kann:

(2.2.2a) $$x = \min\left(\frac{1}{a_1}v_1, \frac{1}{a_2}v_2\right)$$

(2.2.2b) $$x = \min(b_1v_1, b_2v_2)$$"

Nun, die Terminologie ist hier etwas anderes, x bezeichnet hier den Output, der oben mit q bezeichnet wurde, und v steht für unseren Verbrauch x. Ein Minimierungsproblem ist allerdings bislang nicht aufgetreten. Wir müssen den weiteren Text einbeziehen, um das zu verstehen (S.40):

"Die Inputkoeffizienten geben die pro Outputeinheit erforderlichen Faktoreinsatzmengen an."

Zur Erinnerung: Genau so hatten wir die Elemente der Matrix A definiert.

"Die Outputkoeffizienten sind Faktorproduktivitäten und drücken die pro Inputeinheit erzielbare Outputmenge aus. *Nur die kleinere der von den vorhandenen Inputs her möglichen Erzeugnismengen* kann entstehen. Die tatsächlich mögliche Erzeugnismenge hängt vom «Engpaßfaktor» ab. Überschüssige Mengen eines der beiden Produktionsfaktoren können nicht zum Ausstoß beitragen; sie sind überflüssig."

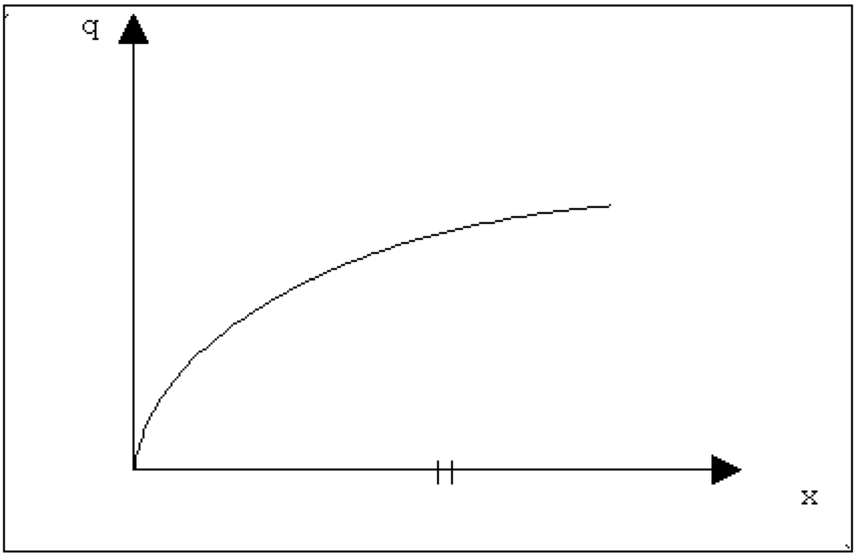
Wagner berücksichtigt also einen Engpaß, der bei Vorhaltung der Produktionsmittel dann entsteht, wenn diese nicht in der gehörigen Proportion vorgehalten werden. Als Input gilt bei Wagner das, was irgendwie erworben (auch: produziert) worden ist, um damit eine bestimmte Produktion durchzuführen; Lagerbestände sind natürlich auch in Sraffas einfachstem Modell nötig, aber sie werden so konstruiert, daß keine Engpässe auftreten. Dadurch erscheint der Input bei Sraffa als das, was wirklich in die Produktion eingeht. Das Fehlen von Engpässen ist auch der Grund, weshalb wir bislang auf kein Minimierungsproblem gestoßen sind.

"Unser Modellunternehmer legt für die Entscheidungsperiode die Produktionsmenge und die komplementären Faktoreinsatzmengen genau passend fest. Deshalb schreibt man für die Leontief-Produktionsfunktion häufig die Faktorverbrauchs- oder *Faktoreinsatzfunktionen:*

$$(2.2.3)\quad \begin{aligned} v_1 &= a_1 x \\ v_2 &= a_2 x \end{aligned}$$

Man denkt an "effiziente" Kombinationen mit $v_1/a_1 = v_2/a_2$ und an ein festes Faktoreinsatzverhältnis $v_1/v_2 = a_1/a_2$. Nur "totale" Faktorvariation, d.h. eine Vergrößerung oder Verkleinerung des sich genau ergänzenden Einsatzes beider Faktoren, ist sinnvoll."

Abgesehen von Unterschieden der Notation und des mikro- versus makroökonomischen Ansatzes bewegt sich das einfache Modell Sraffas hinsichtlich seiner physischen Struktur also noch vollkommen im Rahmen dessen, was auch in der Mainstream-Ökonomie "gedacht" wird. Letztere ist allerdings stärker an "substitutionale Produktionsfunktionen" interessiert. Desweiteren an nicht-linearen Produktionsfunktionen wie zum Beispiel der folgenden:



Mit der Einführung der technologischen Matrix A haben wir das Problem, daß Sraffas Modell als eine lineare Produktionsfunktion gedeutet werden muß, also möglicherweise nur näherungsweise gilt. Wenn man bedenkt, daß momentan ein Wachstum von wenigen Prozent als hoch angesehen wird, dürfte die Näherung "pretty good" sein.

Klar dürfte aber sein, daß eine lineare Funktion kein Maximum hat, so daß viele Überlegungen der Grenzproduktivitätstheorie hier einfach ins Leere laufen.

Die preisliche Struktur des 2-Sektoren-Modells

Der eigentlich Klu kommt aber noch: Wir definieren den Vektor der Preise durch den Spaltenvektor p:

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Mit den Preisen betreten wir eine neue Ebene der ökonomischen Realität, die von der physischen Struktur zwar beeinflußt wird, aber davon unabhängig definiert werden muß. Das gilt insbesondere für die Preisgleichungen. Sie lassen sich aus den bisher notierten Gleichungen NICHT deduktiv ableiten. Für unsere kleine Volkswirtschaft können wir sinnvollerweise festsetzen:

$$Ap = p \qquad (2)$$

Ausführlich geschrieben:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Zur Interpretation betrachten wir beispielsweise die obere Zeile der Matrix. Die Summe $a_{11}p_1 + a_{12}p_2$ sind die Kosten des Verbrauchs im 1. Industriezweig je Bruttoprodukt. Die obige Preisgleichung fordert, daß die Kosten gleich dem Erlös sind, die eine Einheit des Bruttoprodukts bringt (= der Preis des entsprechenden Gutes).
Ich habe diesen Preis gewählt, weil er eine Verteilung des Outputs auf dem Markt ermöglicht, die die anfänglichen Produktionsbedingungen wieder herstellt. Die beiden Zweige haben Gesamtkosten von

$$QAp = Qp \qquad (4)$$

Die linke Seite lautet ausführlich geschrieben:

$$QAp = Xp = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}p_1 + x_{12}p_2 \\ x_{21}p_1 + x_{22}p_2 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

und rechts steht

$$\begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 p_1 \\ q_2 p_2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Vergleich zeigt: Für jeden Zweig gilt: Gesamtkosten = Erlös. Das ist natürlich das Resultat meiner Preiswahl, genauer: des theoretischen Ansatzes der Preiswahl. Den welche Preise die richtigen sind, ist hier technologisch vorherbestimmt:

Aus (2) folgt

$$(E - A)p = 0 \tag{7}$$

dabei ist E die Einheitsmatrix. Für eine nicht-triviale Lösung muß die Determinante der Koeffizientenmatrix Null sein:

$$Det(E - A) = 0 \tag{8}$$

Wir rechnen unter Nutzung von (17):

$$(E - A) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{7}{10} & -\frac{3}{100} \\ -6 & 1 - \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{3}{100} \\ -6 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Die Determinante ist:

$$Det(E - A) = \frac{9}{50} - \frac{18}{100} = 0 \tag{10}$$

Also - wie gefordert - Null. Der Preis ist dann bis auf einen skalaren Faktor bestimmt (freie Festlegung einer Maßeinheit). Man kann zum Beispiel $p_2 = 1$ setzen. Das nennt man dann "Normierung". Im speziellen Falle ist p_2 zum Numéraire erhoben worden.

Der andere Preis ergibt sich dann aus einer beliebigen Gleichung des Systems (7). Dazu greifen wir die 1. Zeile von (9) heraus, multiplizieren sie mit dem Vektor p

$$\frac{3}{10}p_1 - \frac{3}{100}p_2 = 0$$

und erinnern uns an die Normierung $p_2 = 1$:

$$\frac{3}{10} p_1 = \frac{3}{100}$$

$$p_1 = \frac{1}{10}$$

Das ist der oben angegebene Tauschwert: In Eisen ausgedrückt ist der Preis eines Quarters Weizen gleich 1/10.

Zu den Unterschieden:

A. Wagner, S.35: "das Kernproblem der volkswirtschaftlichen Mikroökonomik ... bildet die *Selbststeuerung von Marktwirtschaften über Preise* auf allen Märkten. Damit veränderliche Preise angebotene und nachgefragte Gütermengen aufeinander einregulieren können, müssen Angebot und/oder Nachfrage preisabhängig sein."

Dieses Modell macht auf ein anderes Problem aufmerksam. Die Nachfrage ist unabhängig von den Preisen gegeben, wenn die Produktion auf gleicher Stufenleiter fortgesetzt werden soll. Angebot und Nachfrage regulieren sich nicht auf vorgegebene Preise ein, sondern umgekehrt, die Preise hängen von Angebot und Nachfrage ab, insofern sie exakt durch die Erfordernisse der Produktion (die Produktionsmethoden) diktiert sind.

Ausblick:
Physisches Modell einer n-Sektoren-Wirtschaft
Preismodell
    Preisbestimmung
    Wertestruktur: Surplus, Nettoprodukt, Bruttoprodukt etc.
Luxusproduktion
Explizite Berücksichtigung der Arbeit
Lohn-/Profitraten-Kurve
Veränderungen der Preisstruktur
Unveränderliches Wertmaß gesucht!

Exkurs: Ein-Sektoren-Ökonomie: Das Kornmodell

Exkurs: Das 2-Sektoren-Modell: die Wertestruktur

Rekonstruktion eines Textes: Joan Robinson: Die Akkumulation des Kapitals
Preis-Wicksell-Effekt
Numeraire-Abhängigkeit? Rekonstruktion einer Diskussion
Kuppelproduktion
Technikwahl