Georg Quaas

Das Modell von Nelson & Winter (Entwurf vom Jan. 2007)

Modelliert werden vor allem mikroökonomische Strukturen wie Firmen und deren Technologien, die dann mittels einer Aggregation an die makroökonomische Struktur der modellierten Volkswirtschaft angeschlossen werden. Im Mittelpunkt steht das Modell der Firma, genauer gesagt: der Firmen, denn das einheitliche Firmenmodell wird so oft implementiert, wie es Firmen im Modell geben soll. Klarerweise wird damit die Unternehmensstruktur einer Volkswirtschaft angedeutet; aber es ist keineswegs beabsichtigt, tatsächlich existierende Firmen nachzubilden, obwohl das im Prinzip möglich wäre. Jede Firma hat Schnittstellen zu den wenigen in das Modell inkorporierten makroökonomischen Variablen, darunter das Bruttoinlandsprodukt. In diesem Punkt wird die Aggregation besonders einfach modelliert: der Output einer Firma ist unmittelbar Teil des BIP. Der Zusammenhang zwischen der inneren Struktur einer Firma, ihrem Output und ihrem Einfluß auf das BIP beschreibt die folgende Passage:

> „The model involves a number of firms, all producing the same homogeneous product (GNP), by employing two factors: labor and physical capital. In a particular time period, a firm is characterized by the production technique it is using – described by a pair of input coefficients (a_l, a_k)- and its capital stock *K*."[1]

Das Modell der Firma

Die folgenden Definitionen gelten für jede Firma und für jede Zeitperiode.

Die *technologische Struktur* der i-ten Firma oder ihrer *Produktionstechnik* wird durch ein Paar von Input-Koeffizienten charakterisiert, die sich einerseits auf das physische Kapital und andererseits auf die eingesetzte und bezahlte Arbeit beziehen. Beide werden von folgendem Vektor zusammenfassend dargestellt:

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{ci} \\ a_{li} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Kapital \\ Arbeit \end{bmatrix} \tag{1}$$

Die Koeffizienten sind hier physisch zu interpretieren, dass heißt, der Koeffizient a_{ci} stellt die Menge physischen Kapitals, bestehend aus Investitionsgütern, dar, die verbraucht wird, um eine Einheit des physischen

[1] S.209.

Outputs der Firma herzustellen, und der Koeffizient a_{li} ist das Arbeitsquantum, das für eben diesen Produktionsprozess erforderlich ist – gemessen in Stunden.

Üblicherweise umfasst das Quantum an verbrauchten Kapitalgütern sowohl die abgeschriebenen Gebäude, Maschinen, Werkzeugen etc., die zum Anlagevermögen gehören, als auch die Menge von Gütern und Dienstleistungen, die in derselben Produktionsperiode von anderen Firmen produziert und von der i-ten Firma verbraucht worden sind, also die sogenannten Vorleistungen. Die Interpretation des verbrauchten Kapitals kann (und gegebenenfalls auch: muss) geändert werden, wenn die speziellen Anforderungen eines Modells das verlangen. Beispielsweise kann beim Nelson-Winter-Modell - wie so oft in der VGR - auf die Darstellung der Vorleistungen verzichtet werden.

Nelson und Winter erwähnen Preise, von denen einer gleich 1 gesetzt werden soll.[2] Das nehme ich zum Anlass, Preise für Arbeit und Kapitalgüter einzuführen. Es sei

$$P = \begin{bmatrix} p_c & 0 \\ 0 & p_l \end{bmatrix} \tag{2}$$

die entsprechende Preis-Matrix. Sie enthält das Element p_c, das sich auf den Preis einer Einheit homogener Investitionsgüter bezieht, empirisch also mit Hilfe des entsprechenden Preisindexes zu realisieren wäre, während p_l den Preis einer Arbeitsstunde, also den Lohn bezeichnet, der im Originaltext durch W symbolisiert wird. Der Zahlenwert von p_c soll gleich 1 gesetzt werden, während $p_l = W$ von der Nachfragekurve nach Arbeit abhängt:[3]

$$P = \begin{bmatrix} p_c & 0 \\ 0 & p_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix} \tag{2'}$$

Der Output der i-ten Firma wird durch eine Größe Q_i erfasst.[4] Dabei handelt es sich um den Teil des BIP, der durch die i-te Firma hergestellt wird. Stofflich handelt es sich um Lebensmittel und Investitionsgüter. Da aber die mikroökonomische Struktur der Haushalte nicht modelliert wird, kommt nur der Verbrauch von Investitionsgüter durch die Firmen in Betracht, wenn nach der Verwendung des BIP gefragt wird. Die Zusammensetzung des BIP aus Produktions- und Lebensmitteln müsste jedoch eine Rolle spielen, wenn im

[2] Vgl. S.210.
[3] Vgl. S.214 ff.
[4] Vgl. S.213.

Zuge einer Weiterentwicklung des Modells für p_c tatsächlich ein Preisindex eingesetzt wird.
Wenn wir den Output Q_i durch den Preis p_c teilen, erhalten wir den physischen Output (das reale BIP bzw. einen Teil davon), das heißt die Anzahl an homogenen Gütern Q_i/p_c, die durch die Firma in der betrachteten Periode hergestellt werden. Da ihr Preis gleich Eins gesetzt wurde, stimmt das Volumen des physischen Outputs zahlenmäßig mit dem des preismäßig bewerteten, nominalen Outputs überein. Für die Weiterentwicklung des N-W-Modells könnte die Differenzierung zwischen nominalem und realem Output (BIP!) wichtig werden.
Der Verbrauch an Gütern und an Arbeit erhöht sich mit dem Output, der in einer Periode erzeugt wird, also mit dem Produktionsniveau. Gemessen wird er durch den Vektor

$$N_i = \begin{bmatrix} n_{ci} \\ n_{li} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ci} Q_i/p_c \\ a_{li} Q_i/p_c \end{bmatrix} = A_i Q_i/p_c \tag{3}$$

Das bedeutet: Die technologische Struktur, erfasst durch die Matrix A_i, muss mit dem physischen Output multipliziert werden, um den physischen Verbrauch an Investitionsgütern bzw. an Arbeit zu erhalten. Beide Komponenten zusammen werden hier als Verbrauchsvektor N_i bezeichnet, der zugleich die Nachfrage einer Firma nach Gütern und Arbeit darstellt. Bezugnehmend auf Nelson und Winter kann man sagen, dass die Komponente n_{li} gleich der Menge an Arbeit L_i ist, die durch die Firma während der Produktionsperiode beschäftigt wird:[5]

$$L_i = a_{li} Q_i/p_c\,. \tag{4}$$

Es sei C_i Ausdruck der gesamten Kosten, die durch die produktiven Aktivitäten der i-ten Firma entstehen. Seine Größe kann auf einfache Weise mit Hilfe des Summenvektors

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

berechnet werden: Die Produktionskosten der i-ten Firma sind der mit Preisen bewertete Verbrauch an Investitionsgütern plus der bewertete Verbrauch an Arbeit – aufsummiert mit Hilfe des Zeilenvektors E:

$$C_i = EPN_i = EPA_i Q_i/p_c = a_{ci}Q_i + p_l a_{li} Q_i/p_c = a_{ci}Q_i + WL_i \tag{5}$$

[5] Vgl. S.213.

Nach Nelson und Winter ist eine Firma u.a. auch durch das von ihr angewandte Kapital K_i charakterisiert. Wir interpretieren K_i als das Kapital oder Anlagevermögen der i-ten Firma, d.h. als den Wert einer zweckmäßig kombinierten, physischen Menge von Investitionsgütern. Bedingt durch seine Anwendung im Produktionsprozess und durch den Kauf von neuen Maschinen, Werkzeugen, usw. ändert sich das Kapital einer Firma im Laufe der Zeit. Sei D_i der Wert von jenem Teil des "Kapitalstocks" der *i*-ten Firma, der während der Produktionsperiode verbraucht wird, und sei weiterhin IB_i der Wert der neu angeschafften Kapitalgüter, d.h. der Wert der Bruttoinvestitionen. Dann kann die Veränderung des Anlagevermögens folgendermaßen dargestellt werden:

$$K_i(t+1) = K_i(t) - D_i(t) + IB_i(t). \tag{6}$$

Nelson und Winter unterstellen, dass die Abschreibung D_i durch einen Zufallsmechanismus gesteuert wird: "…each unit of capital is, independently, subject to a failure probability of … 0.04 each period."[6] Ich interpretiere diesen mikroökonomischen Zufallsprozess auf makroökonomischer Ebene rein deterministisch, und zwar so, dass der zufällige Verfall des Anlagevermögens zu einer regelmäßigen Entwertung von 4% führt:

$$D_i = 0.04 \cdot K_i. \tag{7}$$

Diese Interpretation kann später im Rahmen einer Verfeinerung des Modells bei Bedarf korrigiert werden. - Trotzdem nur ein Teil des Anlagevermögens verbraucht wird, muss das Kapital als Ganzes präsent sein, um seine produktive Wirkung zu entfalten: "A firm's production decision rule is simply to use all of its capacity to produce output, using it's current technique – no slow down or shut down is allowed for."[7]

Wenn wir vom Verbrauch der Produktionsmittel und Dienstleistungen absehen, die von anderen Firmen hergestellt worden sind und von der hier betrachteten Firma *i* noch in der gleichen Periode zu produktiven Zwecken verbraucht werden, dann gelangen wir zu folgenden Konsequenzen des eben beschriebenen Ansatzes:

(i) die Produktion einer vorgegebenen Menge Output Q_i erfordert den Verbrauch einer bestimmten Menge an Kapitalgütern, und zwar der Formel (3) entsprechend:

[6] S.213.
[7] S.209.

$$a_{ci}\,Q_i / p_c = n_{ci} \tag{3'}$$

Nach der eben beschriebenen Regel, dass das gesamte Kapital angewandt und sich nach einem vorgegebenen Satz von beispielsweise 4% entwertet, muss die so bestimmte Abschreibung gleich dem Verbrauch an Kapitalgütern sein, der durch (3') erfasst wird:

$$a_{ci}Q_i = p_c n_{ci} = D_i = 0.04 \cdot K_i \text{ (in einer bestimmten Periode t).} \tag{8}$$

Daraus folgt, dass die Menge (der Wert) des Outputs vollständig durch die technologische Struktur und die Größe des angewandten Kapitals bestimmt ist. Das ergibt sich nach einfacher Umstellung der Gleichung (8):

$$Q_i = a_{ci}^{-1} \cdot 0.04 \cdot K_i\,. \tag{8'}$$

(ii) Eine weitere Konsequenz der obigen "production decision rule" und der "depreciation rule" besteht in einer Modifikation der Formel (6):

$$K_i(t+1) = \left(1 - 0.04\right) K\left(t\right) + IB_i\left(t\right), \tag{6'}$$

Das bedeutet folgendes: Nachdem das volkswirtschaftlich vorhandene Kapital auf die Gesamtheit der Firmen verteilt worden ist, die erwarten lassen, einen hinreichend hohen Profit abzuwerfen, entwickelt sich das Kapital der Firmen nach einer einfachen Regel: Der Wert ihrer zukünftigen Ausstattung ist gleich dem um die Abschreibung verminderten Kapital plus der Bruttoinvestition. "The capital stock, thus reduced [by depreciation or another 'random mechanism' – G.Q.], is then increased by the firm's gross investment in the period."[8]

Zur Erinnerung: Im Modell gibt es nur eine einzige Ware, und diese konstituiert die physische Grundlage des BIP – ein Teil davon wird durch die Firma *i* direkt hergestellt. Diese Ware muss sowohl als Lebensmittel als auch als Kapitalgut verwendbar sein. Wie viel davon wird von der Firma nachgefragt, nachdem der Output "verkauft" worden ist? "Extant firms invest in the purchases of new capital the earnings they have left after paying wages and required dividends."[9] Genau gesagt wird der gesamte Profit in neue Kapitalgüter investiert:

"Gross investment is determined by gross profit, where gross profit πK is revenue Q minus wage bill WL minus required dividends RK."[10]

[8] S.213.
[9] S.214.
[10] S.213.

Das werden wir jetzt Schritt für Schritt notieren. - Die Löhne, die am Ende der Periode von der i-ten Firma bezahlt werden müssen, haben den Umfang von

$$W_i L_i = p_l a_{li} Q_i / p_c = \frac{p_l}{p_c} a_{li} a_{ci}^{-1} \cdot 0.04 \cdot K_i \tag{9}$$

Mit Bezug auf Nelson und Winters Ausdruck "required dividends *RK*" interpretieren wir *R* als Zinssatz; damit ergibt sich die Gesamtmenge an Dividende RK_i, die von der *i*-ten Firma bezahlt werden muss, als Zins *R* multipliziert mit der Menge an angewandtem Kapital K_i.

Von diesen Größen kann die Bruttoinvestition wie folgt abgeleitet werden:

$$IB_i = Q_i - p_l a_{li} \frac{Q_i}{p_c} - RK_i = \left[\left(1 - \frac{p_l}{p_c} a_{li} \right) 0.04 \cdot a_{ci}^{-1} - R \right] K_i \tag{10}$$

Erinnern wir uns, dass der gesamte Profit für Neuinvestitionen gebraucht wird, dann ist

$$\pi \cdot K_i = IB_i \tag{11}$$

und die Profitrate ergibt sich zu

$$\pi = \left(1 - \frac{p_l}{p_c} a_{li} \right) 0.04 \cdot a_{ci}^{-1} - R \tag{12}$$

"The higher the value of R …, the smaller the investment the firm is able to finance."[11]

(iii) Man findet einen anderen Zugang zu diesen Zusammenhängen auf folgende Weise: Output Q_i minus Gesamtkosten C_i minus Dividende RK_i muss gleich der Veränderung des Kapitals ΔK_i sein, also

$$\Delta K_i = K_i(t+1) - K_i(t) = Q_i - C_i - RK_i. \tag{13}$$

Wenn wir C_i mit Hilfe der Formeln (5) und (8') ersetzen, erhält man

[11] S.213.

$$\Delta K_i = Q_i - a_{ci}Q_i - Wa_{li}Q_i / p_c - RK_i = \left[\left(1 - a_{ci} - \frac{W}{p_c} a_{li} \right) a_{ci}^{-1} \cdot 0.04 - R \right] K_i \quad (13')$$

Mit den Worten von Nelson und Winter: "Thus, the next-period techniques of all firms are determined (probabilistically), and so are the next-period capital stocks."[12]

(iv) Andererseits ist die Veränderung des Kapitals nach den Formeln (6) und (7) bereist bestimmt worden:

$$\Delta K_i = IB_i(t) - D_i(t) = IB_i(t) - 0.04 \cdot K_i(t) \quad (14)$$

Gleichung (14) kann mit Gl. (13') gleichgesetzt werden, d.h.

$$\left[\left(1 - a_{ci} - \frac{W}{p_c} a_{li} \right) a_{ci}^{-1} \cdot 0.04 - R \right] K_i = IB_i(t) - 0.04 \cdot K_i(t).$$

Nachdem identische Terme beseitigt worden sind, erhält man

$$IB_i(t) = \left[\left(1 - \frac{W}{p_c} a_{li} \right) a_{ci}^{-1} \cdot 0.04 - R \right] K_i \quad (14')$$

Dieses Resultat stimmt mit der Gleichung (10) überein.

Forschung & Entwicklung

Nelson und Winter fordern, dass diesbezügliche "activities of our firms will be modeled in terms of a probability distribution for coming up with different new techniques."[13] Die Technologie einer Firma wird durch die beiden Komponenten des Vektors charakterisiert, der durch Gleichung (1) definiert worden ist. Jeder dieser Koeffizienten kann als Ausgangspunkt einer Zufallsverteilung betrachtet werden, die neue Koeffizienten erzeugt, die (i) das Ergebnis der Aktivitäten auf dem Gebiet von F & E widerspiegeln und (ii) Gegenstand einer Bewertung durch das Management sind, auf deren Grundlage entschieden wird, ob die neue Technik im Produktionsprozess implementiert wird.

Die Funktion *frnd* sei ein Zufallsgenerator, der normal-verteilte Zufallszahlen mit dem Erwartungswert Null und der Varianz Eins erzeugt. Sei weiterhin

[12] S.214.

$a(t=0)$ der Wert eines “Startpunktes” für eine *potenzielle* Veränderung eines Koeffizienten. Der nächste, zufallsgenerierte Wert ist dann bestimmt durch

$$a(t=1) = a(t=0) + s_i \cdot frnd$$

wobei s_i die *Standardabweichung* des entsprechenden *technologischen Koeffizienten* bedeutet. Man könnte beispielsweise annehmen, dass die Standardabweichung konstant und spezifisch für eine bestimmte Firma ist – da es dazu keine Aussage unserer Autoren gibt, ist man relativ frei bei der Wahl einer geeigneten Regel.

Im allgemeinen kann angenommen werden, dass sich der Vector A_i der beiden technologischen Koeffizienten der *i*-ten Firma geändert haben könnte, nachdem F & E-Aktivitäten stattgefunden haben, und zwar nach folgender Formel:

$$\begin{bmatrix} a_{ci}(t+1) \\ a_{li}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ci}(t) \\ a_{li}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{ci} \cdot frnd_c \\ s_{li} \cdot frnd_l \end{bmatrix} \tag{15}$$

Hierbei ist unterstellt worden, dass zwei Zufallsgeneratoren unabhängig voneinander die beiden Koeffizienten erzeugen. Nelson und Winter setzen aber voraus, dass die beiden Generatoren auf sehr spezielle Weise miteinander gekoppelt sind,[14] so dass es möglich wird, den Unterschied zwischen Innovationen, die entweder die Kapital- oder die Arbeitskoeffizienten betreffen, zu kontrollieren. Dieses Ziel kann aber einfacher durch Manipulieren der beiden Koeffizienten für die Standardabweichungen erreicht werden.

Ein anderes Ziel der Autoren besteht darin, zwischen echten Innovationen (Erfindungen) und bloßen Imitationen zu differenzieren. Dabei bedeutet “imitation”, dass die Koeffizienten kopiert werden, die von der *größten Fraktion* der Firmen verwendet wird. Alternativ dazu könnte man die Koeffizienten der *besten Firmen* verwenden.[15] Nelson und Winter konstruieren eine Wahrscheinlichkeitsfunktion, mit deren Hilfe das Implementieren einer neuen (imitierten oder erfundenen) Technologie determiniert werden soll. Die Autoren verweisen jedoch auch in diesem Zusammenhang auf eine Alternative, die wesentlich einfacher und – aus meiner Sicht – realistischer ist:

“An alternative rule turned up by the search process is adopted by the firm only if it promises to yield a higher return.”[16]

---

[13] S.210.
[14] Vgl. S.211 f.
[15] Vgl. S.212.
[16] S.212.

Das heißt: Bevor eine neue Technologie implementiert wird, hat nach dieser Regel eine Bewertung ihrer Profitabilität zu erfolgen. Im Kern bedeutet das einen Vergleich der Herstellungskosten der alten mit denen der neuen Technologie auf Basis der aktuellen Preise und des aktuellen Produktionsniveaus. Falls die Kosten aufgrund der neuen Produktionsmethode niedriger sind als die aufgrund der alten, wird sie implementiert und charakterisiert dann den Produktionsprozess der nächsten Periode – der allerdings bei inzwischen veränderten Preisen und Outputmengen stattfindet. Die entsprechende „Entscheidungsregel“ kann mittels Gl. (5) formuliert werden:

$$C_i(t+1)-C_i(t)=EP\left[A_i(t+1)-A_i(t)\right]Q_i/p_c \prec 0 \tag{16}$$

Nach einfachen Umstellungen erhalten wir die Bedingung

$$s_{ci}\cdot frnd_c + p_l/p_c\cdot s_{li}\cdot frnd_l \prec 0 \tag{16'}$$

als Kern einer Entscheidungsregel für das Implementieren einer neuen Technik. Wenn (16’) befriedigt ist wird die neue Technologie implementiert, andernfalls bleibt es bei der alten.

Es gibt noch eine weitere Entscheidungsregel im Nelson-Winter-Modell für F & E-Aktivitäten: “…only those firms that make gross return on their capital less then the target level of 16 percent engage in search” at all.[17] Das Modell unterstellt “konservative Firmen“, die es vermeiden, sich in Forschung und Entwicklung zu engagieren, wenn sie hinreichend profitabel sind.

Nach Gl. (11) ist die Summe der Profite (returns to capital) identisch mit dem Wert der Bruttoinvestitionen. Wenn wir (14’) durch die Menge des Kapitals teilen, erhalten wir als Kern der zweiten Entscheidungsregel:

$$\left(1-\frac{W}{p_c}a_{li}\right)a_{ci}^{-1}\cdot 0.04-R\succ 0.16 \tag{17}$$

Zusammengenommen haben wir es mit zwei hierarchisch angeordneten Entscheidungsregeln zu tun, die das Implementieren der technologischen Koeffizienten beherrschen: Erstens ist eine hinreichend geringe Profitrate erforderlich, um überhaupt nach alternativen Technologien zu suchen, und zweitens muss die Erwartung gegeben sein, dass die Produktionskosten mit der neuen Technik geringer sein werden als mit der alten.

Wie bereits bemerkt werden die Preise der Kapital- oder Investitionsgüter auf Eins gesetzt. Der Preis der Arbeit (Arbeit gemessen in Stunden) ist der Stundenlohn, und dieser ist eine Funktion, die von Angebot und Nachfrage der

---

[17] S.211.

Arbeit abhängt. Nelson und Winter schlagen die folgende allgemeine Formel für den Arbeitsmarkt vor:

$$w = a + b\left(\frac{L_t}{(1+g)^t}\right)^c$$

Der Leser darf die Parameter *a*, *b*, *g* und *c* beliebig wählen. Der Anschaulichkeit halber setze man $c = 1$ und $g = 0$. Es folgt

$W(t) = a + b \cdot L(t)$ oder

$$W(t+1) = W(t) + b\left[L(t+1) - L(t)\right]$$

als eine einfache Methode, den Stundenlohn der nächsten Produktionsperiode zu berechnen. Ob diese Funktion aber zu einem funktionierenden Modell führt, muss an dieser Stelle noch offen bleiben.