Doz. Dr. Georg Quaas
Institut für Empirische Wirtschaftsforschung

Begleitendes Lehrmaterial zur Vorlesung: Kritischer Rationalimus
Bearbeitungsstand: 06.05.15

4. **Logische Propädeutik zu Poppers Wissenschaftstheorie**

Empirische Theorien sind Systeme von Sätzen, und zwar von synthetischen Sätzen. Das sind Sätze mit Sinn und Bedeutung. Diese Sätze werden mit dem Anspruch verbunden, wahr zu sein. Um festzustellen, ob sie wirklich wahr sind, benötigt man eine Überprüfungsmethode.

Sätze, die wahr oder falsch sind bzw. wahr oder falsch sein können, werden unter einem gewissen Aspekt in der formalen Logik untersucht. Diese Logik ist „formal", weil sie vom Inhalt der Sätze, exakter: vom Inhalt der Aussagen, abstrahiert. Des Weiteren wendet sie Symbole an, die eng verwandt mit der mathematischen Notation sind.

Als Symbol für eine Aussage verwendet man kleine Buchstaben, zum Beispiel p; dieses Symbol bezeichnet eine Aussagenvariable. Damit soll ausgedrückt werden, dass man für p eine beliebige (konkrete) Aussage einsetzen kann: Um welche konkrete Aussage es sich handelt, ist sozusagen „variabel". Das Einsetzen einer bestimmten Aussage nennt man „Interpretation von p". - Am besten, man erläutert das anhand von Beispielen:

p int1 >>Josephus ist ein Historiker.<<
p int2 >>Alle Menschen sind sterblich.<<
p int3 >>Es regnet.<<

Wir können auch ein anderes Symbol, wie z.B. q, benutzen:

q int1 >>Josephus hat den Vornamen 'Flavius'.<<
q int2 >>Cajus ist ein Mensch.<<
q int3 >>Die Erde wird nass.<<

Vom speziellen Inhalt - der hier durch die Aussagen auf der rechten Seiten dargestellt wird - abstrahiert die formale Logik. Dann sind p,q,... Aussagenvariablen, die je nach der speziellen Interpretation wahr oder falsch sein können. In der Aussagenlogik, einem Teilgebiet der formalen Logik, gilt das

Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten: *Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch - es gibt keine dritte Möglichkeit.*

Mit den Aussagenvariablen kann man nun elementare (logische) Operationen durchführen, zum Beispiel sie negieren.

1. Die logische Negation einer Aussage hat das Symbol ~, und es bedeutet, daß eine Aussage, die wahr ist, durch die Negation zu einer falschen Aussage wird - und umgekehrt. Das Schema für diese Operation wird durch die folgende Matrix wiedergegeben:

p	~p
w	f
f	w

Man kann zwei Aussagen auch verknüpfen, und zwar auf verschiedene Weise:

2. Die Konjunktion. Symbol: p & q

Verknüpft man zwei Aussagen p und q mit Hilfe der Konjunktion, so ist die zusammengesetzte Aussage dann und nur dann wahr, wenn jede Aussage wahr ist. Die Definition dieser Aussagenverbindung verdeutlicht man sich am besten wieder anhand der Wahrheitswertetabelle:

p	q	p & q
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Es muss also sowohl p als auch q der Fall (wahr) sein, wenn das ganze Aussagenmolekül wahr sein soll. Dies entspricht in dem meisten Fällen wohl dem umgangssprachlichen „sowohl als auch".

3. Die Alternative. Symbol: p V q

Die Matrix der Wahrheitswerte lautet:

p	q	p V q
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Demnach reicht es, wenn eine einzige Aussage – eben p oder q – wahr ist, damit die Aussagenverbindung wahr ist. Umgangssprachlich handelt es sich um das nicht-ausschließende „oder".

4. Die Implikation. Symbol: p → q

Umgangssprachlich ausgedrückt: „wenn p, dann q"; fachmännischer ist: „p impliziert q". „p" heißt das Vorderglied der Implikation, „q" das Hinterglied.

Diese Figur sollte auf keinen Fall nur im Sinne eines analytischen Satzes interpretiert werden, also etwa im Sinne des folgenden Beispiels: >>Wenn dies ein Schwan ist, dann ist dies ein Vogel.<< Es kann sich auch um einen synthetischen Satz handeln, d.h. der begriffliche Inhalt von q kann echt über den von p hinausgehen. Bei Mathematikern ist folgendes Beispiel beliebt: >>Wenn 2 eine Quadratwurzel hat, dann ist der Mond aus grünem Käse.<<

Frage: Wann ist die Implikation falsch? Die Antwort ist exakt auf die Wahrheitswerte der Elementaraussagen zurückzuführen:

p	q	p → q
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Wie man sieht, ist die Implikation nur in dem einen Fall falsch, wenn das Vorderglied wahr ist und das Hinterglied nicht. - Am besten, wir machen uns dies wieder an einem Beispiel klar:

Die Implikation: >>Wenn es regnet, wird die Erde nass.<< (s) Es können vier verschiedene Situationen eintreten:

1. Es regnet, und die Erde wird (tatsächlich) nass. Es folgt: s ist wahr.
2. Es regnet, die Erde wird nicht nass. Es folgt: s ist falsch.
3. Es regnet nicht, die Erde wird nass. Auch in diesem Fall ist s wahr, weil es nicht falsch ist, zu behaupten, dass die Erde nass wird, wenn es regnet, auch wenn die Erde aktuell gerade durch etwas anderes nass gemacht wird (durch einen Wasserwerfer zum Beispiel).
4. Es regnet nicht, und die Erde wird nicht nass. s ist jedenfalls nicht falsch; da es nur zwei Wahrheitswerte gibt, gilt s als wahr.

Einige Schlussregeln (Deduktion)

Ein logischer Schluss muss folgendes leisten: Aus wahren Prämissen soll stets eine wahre Conclusion abgeleitet werden.

1. Die Abtrennungsregel

$$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \end{array}}{q}$$

Kontrolle der Gültigkeit: Anhand der Definition der Implikation.

2. Regel der Einführung der Konjunktion (EK)

$$\frac{\begin{array}{l} p \\ q \end{array}}{p \& q}$$

3. Regel(n) der Beseitigung der Konjunktion (BK)

$$\frac{p \& q}{p} \qquad\qquad \frac{p \& q}{q}$$

4. Regel(n) der Einführung der Alternative (EA)

$$\frac{p}{p \lor q} \qquad\qquad \frac{q}{p \lor q}$$

5. Regel(n) der Beseitigung der Alternative (BA)

$$\frac{\begin{array}{l} p \lor q \\ \sim q \end{array}}{p} \qquad\qquad \frac{\begin{array}{l} p \lor q \\ \sim p \end{array}}{q}$$

6. Der bedingte Syllogismus

$$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \end{array}}{p \rightarrow r}$$

7. Modus tollens (Tol.)

$$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \sim q \end{array}}{\sim p}$$

8. Regel der zusammengesetzten Transposition

$$\frac{r \& p \rightarrow q}{r \& \sim q \rightarrow \sim p}$$

Indirekter Beweis:

(1) r & p → q (An)
(2) r (An)
(3) ~q (A.d.i.B.)
(4) p (An)
(5) r & p (EK: 4,2)
(6) q (AR: 1,5)
(7) Wid. (3,6)

9. (Anwendung der Regel 8)

r & p → q
r
~q
____
~p

10. Regel der Einführung der Implikation

„Wenn wir jedoch aufgrund der Annahmen des Beweises und einer zusätzlichen Annahme einen Ausdruck erhalten, kann man in den Beweis ... eine Implikation einführen, deren Vorderglied diese zusätzliche Annahme und deren Hinterglied ein im Beweis aufgrund dieser Annahme erhaltener Ausdruck ist.“ (Borkowsky, S.70.)

Die Implikation drückt aus, dass man aus begrifflichen oder empirischen Gründen das im Hinterglied behauptete Merkmal als notwendig mit dem im Vorderglied behaupteten Merkmal verbunden sieht. Allerdings ist das Vorliegen des im Hinterglied behaupteten Merkmals für die Existenz des Vorderglied-Merkmals nicht hinreichend; es ist also auch nicht notwendig, dass das Vorderglied-Merkmal vorliegt, wenn das Hinterglied-Merkmal gegeben ist.